

Tema 5: Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Índice del tema:

1. Sistemas de ecuaciones lineales
2. Resolución de sistemas de ecuaciones
3. Sistemas de ecuaciones no lineales
4. Sistemas de inecuaciones con una incógnita
5. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales con dos incógnitas para el que se quiere encontrar una solución común.

Una **solución del sistema** de ecuaciones es cada par de valores que cumple todas las ecuaciones a la vez.

Clasificación de sistemas de ecuaciones

Según su número de soluciones un sistema puede ser:

- **Compatible determinado:** tiene una única solución. Su representación gráfica es dos rectas que se cortan en un punto.
- **Compatible indeterminado:** tiene infinitas soluciones. Su representación gráfica es dos rectas que coinciden (coincidentes).
- **Incompatible:** no tiene solución. Su representación gráfica es dos rectas paralelas.

2. Resolución de sistemas de ecuaciones

Existen tres métodos básicos para resolver sistemas de ecuaciones:

- **Método de sustitución:** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.
- **Método de igualación:** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados.
- **Método de reducción:** consiste en igualar, mediante multiplicaciones, los coeficientes de una de las incógnitas en las dos ecuaciones, de forma que, al restarlas, resulte una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo:

Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

a) Por el método de sustitución

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda.

$$\begin{array}{lll} x + 2y = 5 & 2x - y = 0 & x = 5 - 2y \\ x = 5 - 2y & 2(5 - 2y) - y = 0 & x = 5 - 2 \cdot 2 \\ & 10 - 4y - y = 0 & x = 5 - 4 \\ & 10 - 5y = 0 & x = 1 \\ & 5y = 10 & \\ & y = \frac{10}{5} & \\ & y = 2 & \end{array}$$

La solución es $x = 1$ e $y = 2$.

b) Por el método de igualación

Despejamos x en la primera y en la segunda ecuación e igualamos.

$$\begin{array}{lll} x + 2y = 5 \rightarrow x = 5 - 2y & 5 - 2y = \frac{y}{2} & x = 5 - 2y \\ 2x - y = 0 \rightarrow x = \frac{y}{2} & 10 - 4y = y & x = 5 - 2 \cdot 2 \\ & 10 = 5y & x = 5 - 4 \\ & y = \frac{10}{5} & x = 1 \\ & y = 2 & \end{array}$$

La solución es $x = 1$ e $y = 2$.

c) Por el método de reducción

Igualemos los coeficientes de las x multiplicando la primera ecuación. (En este caso, multiplicamos por 2).

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow - \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \\ \hline 5y = 10 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x = 5 - 2 \cdot 2 \\ x = 1 \end{array}$$

La solución es $x = 1$ e $y = 2$.

ACTIVIDADES:

1. Resuelve estos sistemas.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} -x + 3y = -4 \\ 5x + y = 4 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 2y = -10 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x - 2y = 9 \end{cases} \end{array}$$

Ejemplo: Resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y+x}{3} - \frac{x+1}{4} &= 0 \\ 5y - 3x &= 9 - 2(3x + 2y) \end{aligned} \right\}$$

Pasos a seguir:

1. Expresamos las ecuaciones del sistema en su forma general, $ax + by = c$.

$$\begin{aligned} \frac{y+x}{3} - \frac{x+1}{4} &= 0 \\ \text{m.c.m.}(3,4)=12 \\ \frac{4(y+x) - 3(x+1)}{12} &= 0 \\ 4x + 4y - 3x - 3 &= 0 \\ x - 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5y - 3x &= 9 - 2(3x + 2y) \\ 5y - 3x &= 9 - 6x - 4y \\ 5y - 3x + 6x + 4y &= 9 \\ 3x + 9y &= 9 \end{aligned}$$

Todos los coeficientes de la ecuación son múltiplos de 3, por lo que simplificamos dividiendo entre 3.

$$x + 3y = 3$$

2. Escribimos el sistema equivalente hallado, y elegimos el método de resolución más adecuado.

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y+x}{3} - \frac{x+1}{4} &= 0 \\ 5x - 3y &= 9 - 2(3x + 2y) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - 4y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

Resolvemos este problema por reducción.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 4y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + 4y = 3 \\ -x - 3y = -3 \end{cases} \\ \hline &y = 0 \end{aligned}$$

Hallamos el valor de x sustituyendo en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3 \\ x + 4 \cdot 0 &= 3 \\ x + 0 &= 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución es $(x, y) = (3, 0)$.

ACTIVIDADES:

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ -2x + 3y = -16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + y = 2x \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2y - 3x = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -x + y = \frac{1}{6} \end{cases}$

2. Halla la solución de estos sistemas por el método de igualación.

a) $\begin{cases} x + 4y = -2 \\ 2x - 3y = 29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 9 = y \\ 3y + 1 = -8x \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = 0 \\ \frac{x}{3} - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 18 \\ 4(x - y) = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 8x + 2y = 3y \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x + y = 10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

3. Utiliza el método de reducción para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3x \\ -x + y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 \cdot (x - y) = 25 \\ 3x - 2 \cdot (x + y) = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -5x + 3y = 5 \\ 3x = y + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 5 = -6 \\ 2 \cdot (x + y) = x + 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3 + x - y = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 3y = -\frac{5}{6} \end{cases}$

3. Sistemas de ecuaciones no lineales

Los sistemas de ecuaciones no lineales son aquellos que contienen alguna ecuación no lineal (de grado mayor que 1, racionales, con radicales,...).

Ejemplos

Explica porqué estos sistemas no son lineales.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + y = -1 \end{cases}$

El sistema no es lineal porque la segunda ecuación es de grado 2.

b) $\begin{cases} \frac{3x}{y} + 2y = 9 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$

El sistema no es lineal porque la primera ecuación contiene una fracción algebraica.

c) $\begin{cases} xy + 3y = -1 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}$

El sistema no es lineal porque la primera ecuación es de grado 2.

d) $\begin{cases} 3\sqrt{x+1} - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

El sistema no es lineal porque la primera ecuación contiene un radical.

e) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2^x + 2y = 4 \end{cases}$

El sistema no es lineal porque la segunda ecuación tiene una potencia con exponente x .

Para resolver estos sistemas se suele usar el método de sustitución.

ACTIVIDADES:

1. Di si estos sistemas son lineales o no.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x - 2xy = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = -21 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ x\sqrt{4} - 2y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \sqrt{x - y} = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = \sqrt{5} \\ xy = 18 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$

Pasos a seguir

1. Despejamos una variable en la ecuación que consideremos más conveniente, y sustituimos su valor en la otra ecuación. Y resolvemos la ecuación que resulta.

Despejamos x en la segunda ecuación, y sustituimos en la primera.

$$\begin{array}{l} xy = 2 \\ x = \frac{2}{y} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{1}{y} = 2 \\ \left(\frac{2}{y}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{2}{y} = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

2. Calculamos el valor de la otra incógnita.

$$x = \frac{2}{y}$$

como $y = 1$

$$\begin{array}{l} x = \frac{2}{1} \\ x = 2 \end{array}$$

3. Comprobamos las soluciones.

$$\begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{1}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{array} \xrightarrow{x=2, y=1} \begin{array}{l} \frac{2}{2} + \frac{1}{1} = 2 \\ 2 \cdot 1 = 2 \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 2$ e $y = 1$.

ACTIVIDADES:

1. Resuelve.

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x \cdot (x + y) = -6 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 1 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} xy - y = 3x \\ x^2 + y^2 - 3(x + 3y) = -22 \end{cases}$$

2. Resuelve estos sistemas.

$$a) \begin{cases} (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = -7 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x - 2) \cdot (y + 1) = 9 \\ x \cdot (y - 1) = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y^2 = 3 \\ x^2 - y = 3 \end{cases}$$

4. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones con una incógnita** es un conjunto de inecuaciones del que se quiere obtener una solución común.

Para hallar su solución, primero se resuelve cada una de las inecuaciones por separado, y después se toman las soluciones comunes.

Como la solución de una inecuación es un intervalo, la solución de un sistema de inecuaciones viene dada por la intersección de los intervalos solución de cada intersección.

Ejemplo: Resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita

Resuelve el sistema de inecuaciones
$$\begin{cases} 2x + 3 > 7 \\ x - 2 \leq 6 \end{cases}$$

Pasos a seguir

1. Resolvemos cada inecuación por separado

$$2x + 3 > 7$$

$$2x > 7 - 3$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

$$x - 2 \leq 6$$

$$x \leq 6 + 2$$

$$x \leq 8$$

2. Escribimos las soluciones de cada inecuación en forma de intervalo y las representamos.

De la primera inecuación obtenemos:

$$x > 2 \rightarrow x \in (2, +\infty)$$



De la segunda inecuación obtenemos

$$x \leq 8 \rightarrow x \in (-\infty, 8]$$



3. Representamos los intervalos que hemos calculado en la misma recta y hallamos su intersección.



La solución del sistema es el intervalo $(2, 8]$.



ACTIVIDADES:

1. Resuelve los sistemas de inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\begin{cases} x + 4 > 5 - 2x \\ 3x \geq 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 3 \geq x + 7 \\ 7x + 3 \leq 15 + 3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + 3) > 4 \\ 2x - 3 < x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2(8 - x) \leq -2 \\ 4(x + 6) - 8 > 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 3(x - 2) > x \\ 3x - 4(5 - x) \leq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5(6 - x) + 2(x + 3) \geq 0 \\ -4(3 - 2x) \geq 2(3 - x) \end{cases}$

g) $\begin{cases} 7x - 8(x - 2) \geq 0 \\ 3x + 4(1 - x) \leq 0 \end{cases}$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ 3x \leq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 4 \leq -2 \\ 3x > 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 4 < 0 \\ 2x \leq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3 \leq 2 \\ 5x > 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x - 4 < 0 \\ 3 - x \geq 2 \end{cases}$

3. Halla la solución de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} 2 \cdot (x - 3) < x \\ (4 - x) \cdot 3 \geq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5 \cdot (x - 2) - 10 \leq 0 \\ -3x + 2 \cdot (x + 1) < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3 < 5x + 9 \\ 3 - 4x \leq 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3 \cdot (x - 1) + 8 \leq 11 \\ x + 4 \cdot (2 - x) > 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 4 \cdot (1 - x) < 0 \\ 2x \geq 5 - (x + 6) \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x + (x + 2) \cdot (-1) < 3 \\ -4 - 2 \cdot (x + 6) > -8 \end{cases}$

5. Sistemas de inecuaciones de dos incógnitas

Una inecuación lineal de dos incógnitas es una desigualdad de uno de estos tipos:

$$ax + by < c \quad ax + by \leq c \quad ax + by > c \quad ax + by \geq c$$

donde a , b y c son números y x e y son incógnitas.

Los **soluciones** de estas inecuaciones se expresan en forma de regiones del plano delimitadas por una recta.

Ejemplo:

Resuelve la inecuación con dos incógnitas $x + 2y > 4$.

Consideramos la desigualdad como una igualdad y representamos la recta que se obtiene a partir de ella.

- Si $x = 0$

$$x + 2y = 4$$

$$0 + 2y = 4$$

$$y = 2$$

$$(0,2)$$

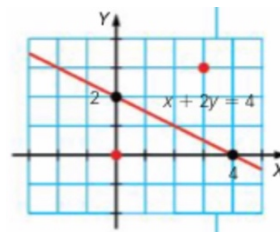
- Si $y = 0$

$$x + 2y = 4$$

$$x + 2 \cdot 0 = 4$$

$$x = 4$$

$$(4,0)$$



La recta divide al plano en dos regiones, solo una de ellas es solución de la inecuación.

Elegimos un punto de una región, el $(0,0)$, y comprobamos si es solución.

$$x + 2y > 4$$

$$0 + 2 \cdot 0 \ngtr 4$$

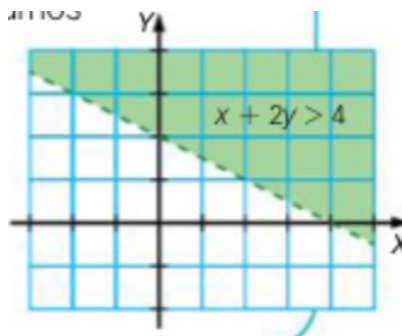
No es solución.

Por tanto, la solución es la región contraria. Lo comprobamos tomando un punto de la otra región, el $(3,3)$.

$$x + 2y > 4$$

$$3 + 2 \cdot 3 > 4$$

Es solución.



Como la desigualdad no contienen el signo $=$, la recta no forma parte de la solución.

- Si el signo de la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, los puntos de la recta cumplen la inecuación; por tanto, la recta también es parte de la solución.
- Si el signo de la desigualdad es $<$ o $>$, la recta no está incluida en la solución.

Un **sistema de inecuaciones lineales** con dos incógnitas es un conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas para el que se quiere encontrar una solución común.

Una **solución del sistema** es todo par de valores que cumple todas las inecuaciones a la vez.

ACTIVIDADES:

1. Resuelve.

a) $x + 2y \leq -1$

b) $2x + 4y \leq -7$

c) $x + 2y \geq -1$

d) $2x + 4y \geq 7$

e) $x + 2y < -1$

f) $2x + 4y > -7$

g) $x + 2y > -1$

h) $2x + 4y < -7$

Ejemplo: Resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas

Resuelve este sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x - y > -2 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

Pasos a seguir

1. Resolvemos cada una de las inecuaciones por separado, y representamos la región del plano que es solución de cada una de las inecuaciones.

- Para la inecuación $x - y > -2$, representamos la recta que representa su igualdad.

Si hacemos $x = 0$

$$x - y = -2$$

$$0 - y = -2$$

$$y = 2$$

Pasa por el punto (0,2).

Si hacemos $x = 1$

$$x - y = -2$$

$$1 - y = -2$$

$$y = 3$$

Pasa por el punto (1,3).

Analizamos si (0,0) es solución de la inecuación.

$$x - y > -2$$

$$0 - 0 > -2$$

$$0 > -2. \text{ Es solución}$$

Por tanto, la solución de esta inecuación es la región a la que pertenece este punto sin la recta límite, ya que la inecuación no contiene el signo =.

- Para la inecuación $x + 2y \leq 4$, representamos la recta que representa su igualdad.

Si hacemos $x = 0$

$$x + 2y = 4$$

$$0 + 2y = 4$$

$$y = 2$$

Pasa por el punto (0,2).

Si hacemos $x = 2$

$$x + 2y = 4$$

$$2 + 2y = 4$$

$$y = 1$$

Pasa por el punto (2,1).

Analizamos si (0,0) es solución de la inecuación.

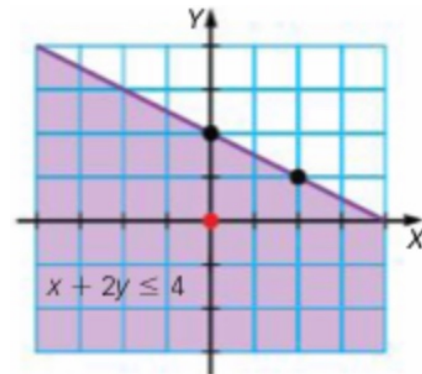
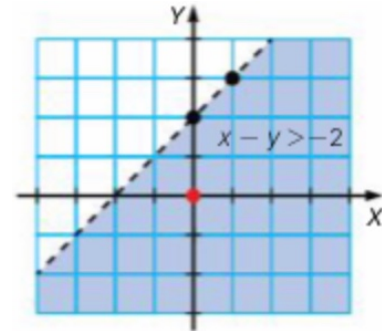
$$x + 2y \leq 4$$

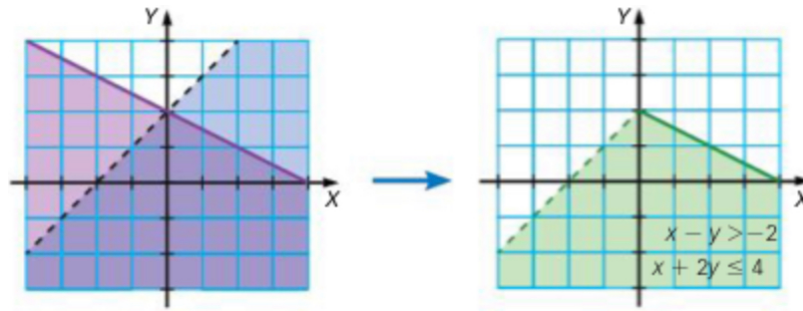
$$0 + 2 \cdot 0 \leq 4$$

$$0 \leq 4. \text{ Es solución}$$

La solución de esta inecuación la región a la que pertenece este punto, junto con su recta límite.

2. Representamos, en los mismos ejes de coordenadas, la región del plano que es solución de cada inecuación y seleccionamos la región que cumple ambas inecuaciones a la vez.





La solución del sistema es la región coloreada de verde.

ACTIVIDADES:

1. Resuelve.

a) $\begin{cases} x + 4y \leq 1 \\ x - 2y \geq 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4y \leq 1 \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y \geq -1 \\ 4x - y \geq -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y \leq -1 \\ 4x - y \geq -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y \leq 4 \\ x + y \geq -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y \geq 4 \\ x + y \geq -3 \end{cases}$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x - y > 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \geq -3 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y \geq -3 \\ x + 3y \leq -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -y \geq 4 \\ 3x + y \leq 1 \end{cases}$