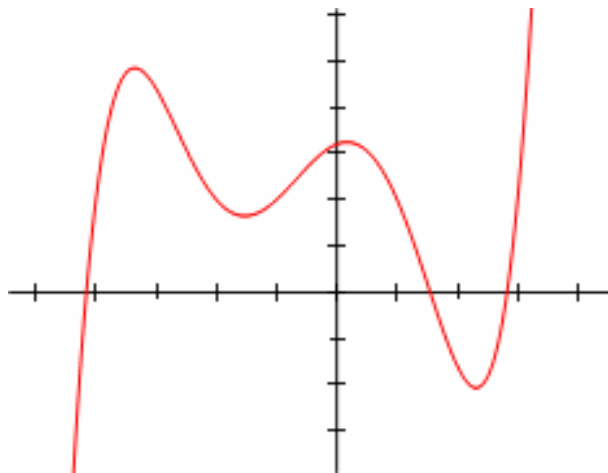


FUNCIONES



MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato CCNN

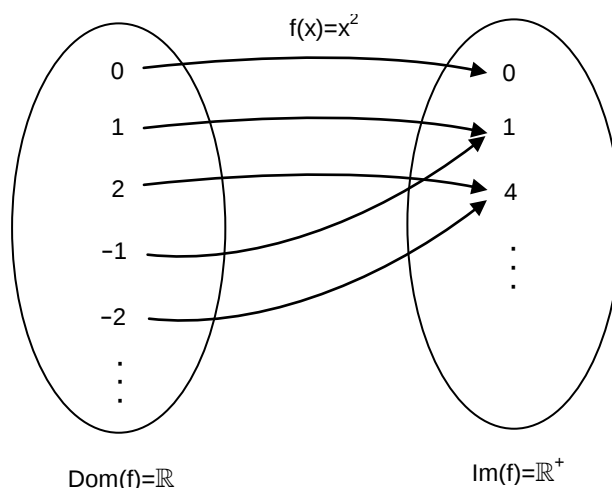
**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**



I) CONCEPTO DE FUNCIÓN. DEFINICIONES

Ejemplo 1: Considerar la función $y=f(x)=x^2$

Podemos estudiar su comportamiento utilizando un diagrama de conjuntos o diagrama de Venn¹:



Ahora bien, en la práctica lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x		-2	-1	0	1	2	3	
$f(x)=x^2$		4	1	0	1	4	9	

(NOTA: más adelante veremos que esta función se trata de una parábola...)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 3 a través de la función anterior es 9, y se designa como $f(3)=9$

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, cada x no puede tener más de una imagen.**

Definiciones:

« Una función es una aplicación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento –llamado x, o variable independiente– del conjunto inicial le corresponde un único elemento a lo sumo –llamado imagen de x, o $f(x)$ – del conjunto final ».

Como acabamos de indicar, x se llama **variable independiente**, mientras que $y=f(x)$ es la **variable dependiente** (ya que, obviamente, depende de x).

$f(x)$ se llama **imagen** de x, mientras que x se llama **antiimagen** de $f(x)$. En el ejemplo anterior, la antiimagen de $y=9$ sería $x=\pm 3$.

Dominio de definición de la función: « Es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen »; se suele designar como $\text{Dom}(f)$, o $\text{Dom}f(x)$, etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, como se indica en el propio diagrama de conjuntos.

¹ Introducidos en 1880 por el matemático y filósofo británico John Venn (1834-1923)

Imagen o Recorrido de la función: «Es el conjunto formado por todas las imágenes $f(x)$ posibles que recorre la función»; se puede designar como $\text{Im}(f)$, o $R(f)$, etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, $\text{Im}(f)=\mathbb{R}^+$, como también se indica en el diagrama.

Por tanto, la definición completa y exhaustiva de esta función sería:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & f(x)=x^2 \end{array}$$

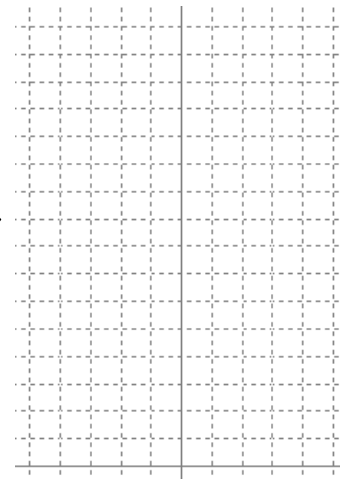
pero en la práctica, por comodidad, se suele abreviar diciendo simplemente $f(x)=x^2$

Ejercicios final tema: 1 y 2

II) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo 2: Construir la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$f(x)=x^2$	...												...



Definición: «La gráfica de una función $y=f(x)$ está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión $y=f(x)$ ».

Observaciones:

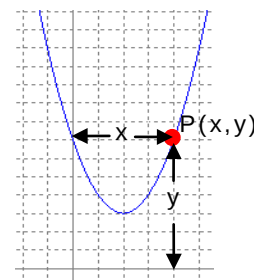
1º) Podemos obtener gráficamente el $\text{Dom}(f)$ si nos desplazamos imaginariamente de izquierda a derecha a lo largo del eje x y vamos viendo -hacia arriba o hacia abajo- cuándo existe imagen, es decir, cuándo hay gráfica.

De la misma forma, podemos obtener el $\text{Im}(f)$ a partir de la gráfica si nos vamos desplazando imaginariamente a lo largo del eje y de abajo a arriba y vamos viendo -a izquierda y derecha- cuándo existe antiimagen(es), es decir, cuándo hay gráfica.

2º) El hecho de que un mismo x no pueda tener más de una imagen se traduce gráficamente en que «**Toda recta vertical que se desplace imaginariamente a lo largo de la gráfica sólo puede cortar a ésta a lo sumo en un punto**»².

3º) Es importante tener en cuenta qué es x e y en una gráfica (ver dibujo):

Dado un punto $P(x,y)$,
la abscisa x es la distancia (>0 o <0) al eje y
la ordenada y es la altura (distancia al eje x , >0 o <0)



Ejemplo 3: Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.

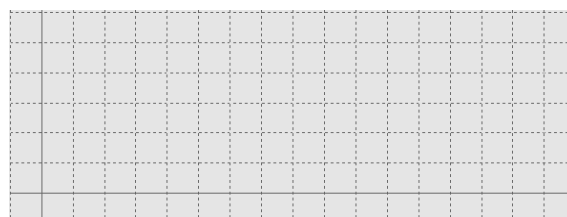
b) Deducir su $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ a la vista de lo anterior.

x															
$f(x)=\sqrt{x}$															



$\text{Dom}(f)=$

$\text{Im}(f)=$



² En cambio, una recta horizontal que se desplace imaginariamente por la gráfica puede cortar a ésta en varios puntos, lo que corresponde al hecho de que un mismo $f(x)$ puede tener varias antiimágenes ... (como ocurre en el ejemplo 2)

Ejercicios final tema: 3 a 6

III) CÁLCULO DEL Dom(f) DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES

Vamos a ver una serie de "recetas" para deducir el dominio de definición de una función a partir exclusivamente del tipo de expresión analítica, es decir, sin necesidad de dibujar su gráfica previamente.

III.1) Función polinómica: «Dom[f(x) polinómica]= $\mathbb{R}$ »

La explicación es obvia: recordemos que el dominio de una función está formado por todos los x para los que existe imagen, y es evidente que, sea cual sea el polinomio, siempre va a existir imagen $\forall x \in \mathbb{R}$.

III.2) Función racional: Recordar que una función racional es toda aquella que se puede expresar como un cociente, es decir, una función del tipo $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

Pues bien, es obvio que para una función tal existirá imagen siempre que el denominador no se anule; por lo tanto: «El Dom(f) de una función racional está formado por todos los x para los que no se anula el denominador». Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom} \left[f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \right] = \{ x / h(x) \neq 0 \}$$

En la práctica, esto se traduce en ver cuándo se anula la expresión del denominador, es decir, resolver una ecuación; aquellos x que sean raíces del denominador tendremos que excluirlos del dominio:

Ejemplo 4: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}-\{4\}$)

b) $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$)

c) $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$ (Sol: Dom(f)= $\mathbb{R}$)

III.3) Función irracional: Recordar que una función irracional es aquella en la que la x figura dentro de una raíz.

En este tipo de funciones es evidente que, si el índice de la raíz es par, entonces existirá imagen siempre que el radicando sea ≥ 0 ; ahora bien, si el índice es impar, no hay ningún problema en que el radicando sea negativo. Por lo tanto: «El Dom(f) de una función irracional de índice par está formado por todos los x para los que su radicando es ≥ 0 ». Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom} \left[f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \right] = \{ x / g(x) \geq 0 \}$$

En la práctica, esto se traduce en resolver una inecuación:

Ejemplo 5: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = \sqrt{x-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=[9, \infty)$)

b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$)

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-4x+3}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$)

d) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

e) $f(x) = \sqrt[3]{x-9}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

f) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(Sol: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$)

NOTA: Para hallar también analíticamente el $\text{Im}(f)$ habría que obtener, previamente, la inversa de $f(x)$ –como veremos en el apartado VIII–, y hallar a continuación el dominio de ésta; como ello puede resultar complicado, se recomienda preferiblemente hallar el $\text{Im}(f)$ gráficamente.

Ejercicios final tema: 7 y 8

IV) PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

IV.1) Continuidad: «Una función es continua si puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz del papel³. En caso contrario, se dice que es discontinua»

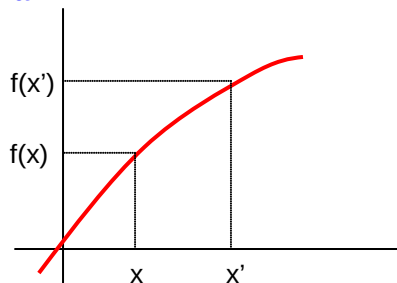
³ En el tema 8 (Límites y continuidad) veremos una definición más formal de continuidad, que nos permitirá, además, obtener la continuidad de una función sin tener que representarla. De momento, nos contentaremos con esta definición "intuitiva", a partir de la gráfica.

¡IMPORTANTE!: La continuidad se indica siempre respecto al eje x.

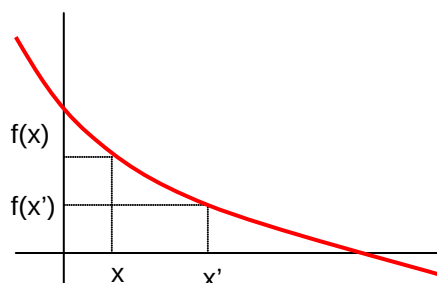
Ejercicio final tema: 9

IV.2) Crecimiento y decrecimiento. M y m:

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: « Una función es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, aumentan también las imágenes f(x) correspondientes».

« Una f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, disminuyen las imágenes f(x) correspondientes».

Más formalmente:

f(x) es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

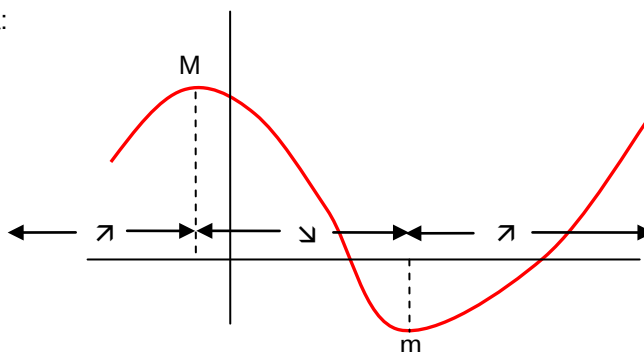
f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Observaciones:

1º) Para indicar que una función es creciente utilizaremos el símbolo ↗, y ↘ si es decreciente.

2º) En el caso de una función constante, la definición sería: $x < x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento o monotonía:



Def: « Una función presenta un **máximo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de creciente (↗) a decreciente (↘) ».

« Una función presenta un **mínimo** (m) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de decreciente (↘) a creciente (↗) ».

Más formalmente:

$f(x)$ tiene un M en $x=a$ si en todos los x próximos a ese punto se verifica $f(x)<f(a)$

$f(x)$ tiene un m en $x=a$ si en todos los x próximos a ese punto se verifica $f(x)>f(a)$

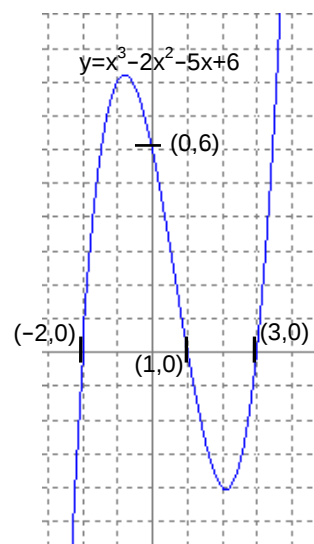
Observaciones:

- 1º) Los intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía, se indican respecto al eje x .
- 2º) Los M y m que hemos definido se llaman extremos relativos⁴.
- 3º) Cuando veamos el último tema (Derivadas), veremos una forma rápida y cómoda de obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, no gráfica sino analíticamente.
- 4º) Puede haber varios M o m , no haber, o infinitos.
- 5º) Si la $f(x)$ es continua, entre dos M siempre hay un m , y viceversa.
- 6º) Nótese que, por ejemplo, si $f(x)$ es ↗ a la izquierda de un punto y ↘ a la derecha, pero no es continua en dicho punto, no podemos decir que hay un M en dicho punto. Lo mismo es aplicable a un m .

Ejercicio final tema: 10

IV.3) Cortes con los ejes:

Observando la siguiente gráfica ejemplo:



es fácil entender la forma de obtener analíticamente –es decir, sin necesidad de dibujar previamente su gráfica– los puntos donde una función corta a los ejes de coordenadas, y que se resume en la siguiente tabla:

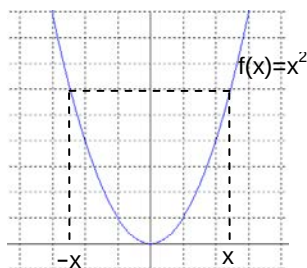
CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	Haciendo $y=0$ (Supone resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	Sustituyendo $x=0$	uno o ninguno

Ejercicio final tema: 11 y 12

⁴ El máximo y mínimo que estamos definiendo se llaman extremos relativos o locales; el próximo curso los definiremos más formalmente, y también veremos que hay extremos absolutos...

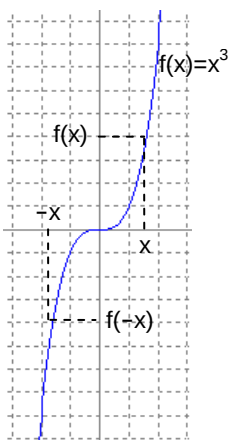
IV.4) Simetría:

a) $f(x)$ PAR:



$$f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al eje } y \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA PAR}]$$

b) $f(x)$ IMPAR:



$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x) \text{ simétrica respecto al origen} \quad [f(x) \text{ SIMÉTRICA IMPAR}]$$

Observaciones:

1º) En la práctica, para ver si una función es simétrica a priori, es decir, sin necesidad de representarla gráficamente, tenemos que hallar $f(-x)$, es decir, reemplazar x por $-x$ (¡utilizando, cuando sea necesario, paréntesis!), y simplificar la expresión resultante; a continuación, tenemos que ver si $f(-x)$ corresponde a alguno de los siguientes tres casos:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}$$

2º) Existen más tipos de simetría, pero nosotros este curso sólo vamos a ver estos dos.

3º) Una función no tiene por qué ser siempre simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no lo son.

4º) **Utilidad de advertir** a priori –sin necesidad de hacer previamente una tabla de valores para dibujar su gráfica– **si una función es simétrica:** en caso de ser simétrica, podemos dedicar nuestros esfuerzos a la parte positiva del eje x , y dibujar cómodamente su mitad negativa sabiendo que será simétrica...

Por ejemplo, si una función es par y presenta un $M(2,5)$, necesariamente tendrá otro en $M(-2,5)$; ahora bien, si fuera impar, lo que presentaría es un $m(-2,-5)$.

5º) Se utiliza el adjetivo "par" porque la función simétrica par típica es $y=x^2$, es decir, con exponente par (también tendría la misma simetría $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc.). De la misma forma, la función impar por antonomasia es $y=x^3$.

Ejercicio final tema: 13 a 16 (Simetría)

17 y 18 (Estudio completo de una función)

V) TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN	FUNCIÓN TRANSFORMADA	GRÁFICA	RESULTADO
	TRASLACIONES	$y=f(x)\pm k$		TRASLACIÓN hacia ARRIBA
				TRASLACIÓN hacia ABAJO
		$y=f(x\pm k)$		TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA
				TRASLACIÓN hacia la DERECHA
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES	$y=k \cdot f(x)$	$k>1$	CONTRACCIÓN
			$0<k<1$	EXPANSIÓN
			$-1<k<0$	(Reflexión +) EXPANSIÓN
			$k<-1$	(Reflexión +) CONTRACCIÓN
	REFLEXIONES	$y=-f(x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE X
		$y=f(-x)$		REFLEXIÓN respecto al EJE Y

Ejercicios final tema: 19 y 20

VI) ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE FUNCIONES

VI.1) Hipérbolas⁵: Son curvas cuya expresión es de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $c \neq 0$

Ejercicio final tema: 21 y 22

A la vista de los ejercicios anteriores, para representar una hipérbola ya no es necesario hacer una tabla de valores, sino seguir los siguientes pasos:

1º) CORTES EJES: $x=0 \Rightarrow$

$y=0 \Rightarrow$

2º) ASÍNTOTAS:

A.H: $y = \frac{a}{c}$

A.V: $cx+d=0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$

VI.2) Función "parte entera" $f(x)=\text{Ent}(x)$

«Es la función que asocia a cada x el entero más próximo situado a su izquierda en la recta real».

Por ejemplo: $\text{Ent}(5,3)=5$

$\text{Ent}(5)=5$

$\text{Ent}(-4,7)=-5$

$\text{Ent}(-3)=-3$

etc...

Gráfica de la función $\text{Ent}(x)$: **Ejercicio final tema: 23**

VI.3) Funciones a trozos

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos, también llamada definida por ramas, hay que representar cada rama en su dominio particular de definición, como puede observarse en los siguientes ejercicios:

Ejercicio final tema: 24 y 25

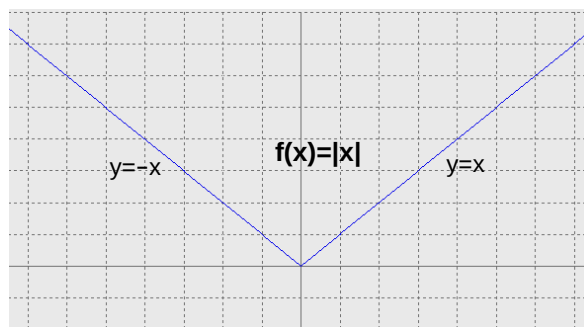
⁵ En realidad las hipérbolas que aquí definimos se llaman hipérbolas equiláteras; el caso más general se verá en el apdo. VIII.

VI.4) Función valor absoluto:

Definición:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

REPRES. GRÁFICA



NOTA: Compruébese que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Conviene tener en cuenta las **propiedades del valor absoluto**:

1º) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

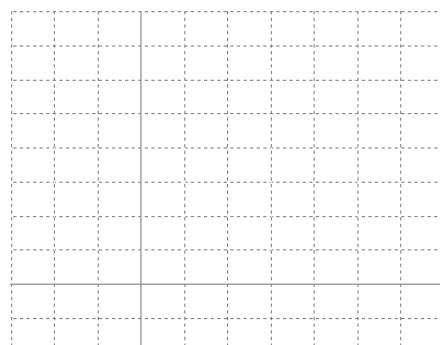
2º) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

3º) $|A - B| = |B - A|$

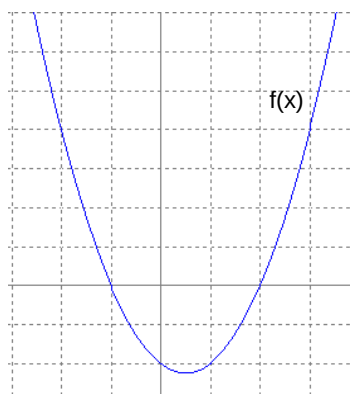
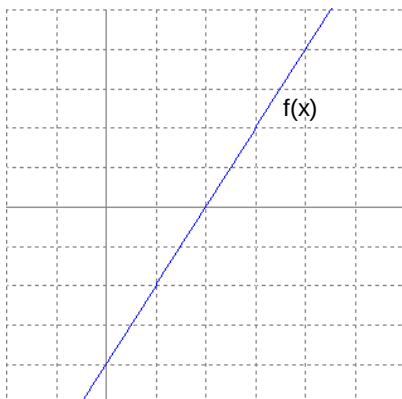
¡Ojo! En general, $|A + B| \neq |A| + |B|$

Ejemplo 6: Representar $f(x) = |2x - 4|$ y expresarla como función definida a trozos.

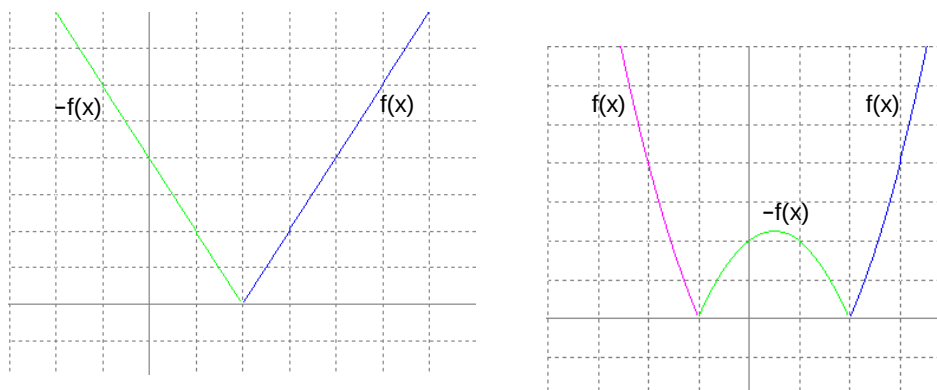


Conclusión: Pasos a seguir para representar $|f(x)|$:

1º) Representar $f(x)$:



2º) Las partes positivas (i.e. por encima del eje x) de $f(x)$ se dejan igual, y las negativas se reflejan respecto al eje x:



Por lo tanto, la clave a la hora de **dibujar $|f(x)|$** es **ver cuándo se anula la función del interior del valor absoluto -es decir, $f(x)$ -, y reflejarla en los intervalos convenientes.**

Ejercicios final tema: 26 a 28

VII) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. FUNCIÓN INVERSA

Supongamos $\left. \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix} \right\}$

Se define:

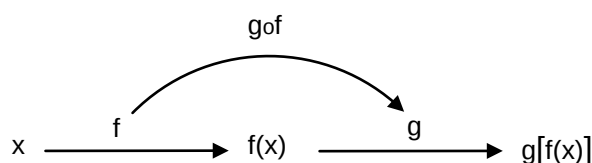
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \text{introducir } f \text{ en } g$$

Se lee "f compuesta con g"

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \text{introducir } g \text{ en } f$$

Se lee "g compuesta con f"

Más en detalle:



Ejemplo 7: Sean

$$\left. \begin{matrix} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] =$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$$

introducir g en f

introducir f en g

Ejercicios final tema: 29 y 30

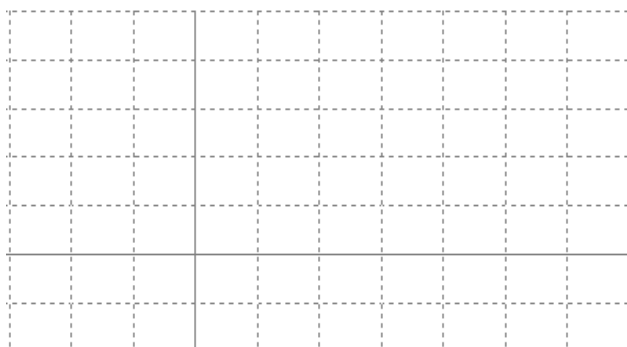
¿Para qué se define todo esto? Para entender el concepto de **función inversa**:

«Cuando dos funciones son tales que al componerlas entre sí se neutralizan (es decir, se obtiene x), entonces se dice que son inversas entre sí».

Notación: «A la función inversa de f se le denomina f^{-1} ».

Ejemplo 8: Comprobar que $\left. \begin{matrix} f(x) = \sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = x^2 \end{matrix} \right\}$ son inversas: $(f \circ f^{-1})(x) =$
 $(f^{-1} \circ f)(x) =$

Representarlas gráficamente sobre los mismos ejes, y sacar conclusiones:



Conclusiones:

1º) Se llama función inversa de f , y se designa como f^{-1} , a otra función que verifica:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

2º) «La gráfica de f^{-1} se obtiene a partir de la de f intercambiando la x y la $y \Rightarrow$ las gráficas de f^{-1} y f son simétricas respecto a la recta $y=x$, bisectriz del 1º cuadrante».

Ejercicio final tema: 31

Método para hallar analíticamente la función inversa de otra: 1º) Intercambiar x y y

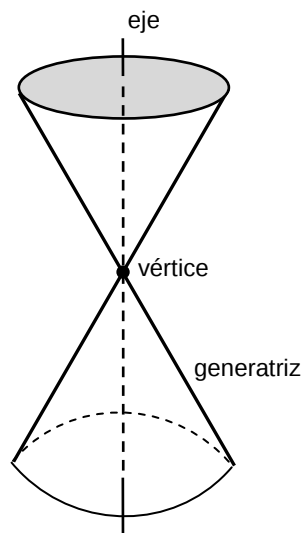
2º) Despejar la nueva y

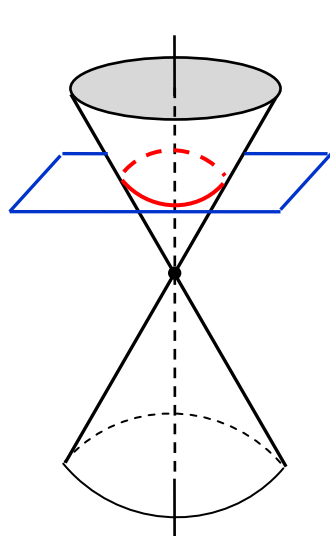
Ejercicio final tema: 32 (Problemas de aplicación: 33 a 42)

VIII) CÓNICAS

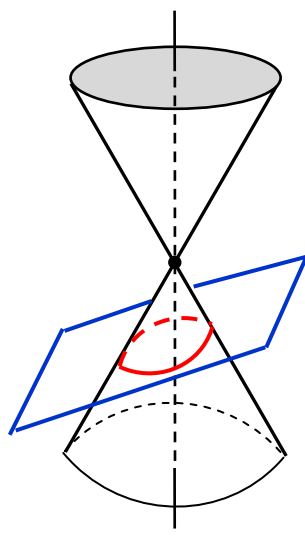
Si giramos una recta (llamada **generatriz**) alrededor de un eje, se obtiene la superficie cónica de la figura, formada por dos conos opuestos por el vértice.

Si dicha superficie es cortada por un plano en diferentes posiciones se obtendrá toda una variedad de cónicas, que se pueden concretar básicamente en 4 casos:

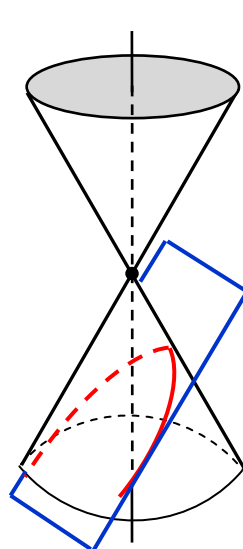




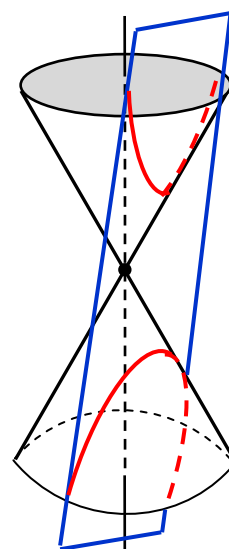
CIRCUNFERENCIA



ELIPSE



PARÁBOLA



HIPÉRBOLA

Todo ello se puede resumir en la siguiente tabla:

CÓNICAS CERRADAS	CIRCUNFERENCIA		El plano que corta es $\perp$ al eje (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UN PUNTO
	ELIPSE		El plano que corta es oblicuo al eje y corta a todas las generatrices (y no pasa por el vértice)	
CÓNICAS ABIERTAS	PARÁBOLA		El plano que corta es $\parallel$ a una de las generatrices -por lo tanto corta a un solo cono- (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UNA RECTA
	HIPÉRBOLA		El plano corta a los dos conos (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada son DOS RECTAS

Reseña histórica:

Apolonio de Perga (Asia Menor, ca. 262–190 a.C.), discípulo de Euclides, descubrió y estudió con detalle las cónicas en su famosa obra homónima, en la que define estas curvas como secciones de un cono. De hecho, inventó los términos elipse, hipérbola y parábola. Sin embargo, parece ser que **Menecmo**, un matemático de la escuela platónica, del siglo IV a.C. pudo haberlas descubierto antes.

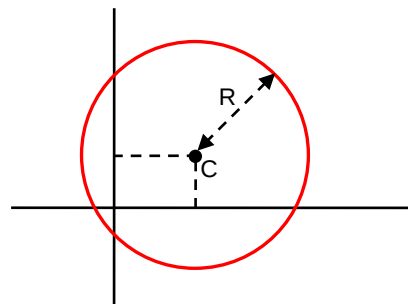
En el siglo XVII empezaron a definirse las cónicas como lugares geométricos en el plano, en vez de como secciones de un cono, que era la definición tradicional de Apolonio. El francés **Pierre Fermat** (1601-1655) fue el primero en utilizar coordenadas, en su caso oblicuas, lo cual le ayudó a obtener ecuaciones de elipses, hipérbolas, etc.. El inglés **John Wallis** (1616-1703) dedujo las ecuaciones de las cónicas en 1655 catalogándolas como curvas de 2º grado en x e y , y probó propiedades de las cónicas mediante ecuaciones.

Veamos a continuación sucintamente las ecuaciones de estas curvas:

VIII.1) Circunferencia:

Su ecuación es de la forma⁶: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Ejercicio final tema: 43



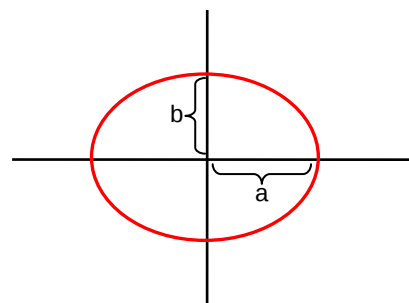
VIII.2) Elipse:

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde **a**: semieje mayor

b: semieje menor



Nótese que la circunferencia es un caso particular de la elipse.

Ejercicios final tema: 44 y 45

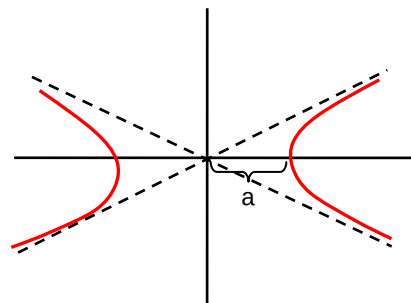
VIII.3) Hipérbola:

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde **a**: distancia de un vértice al origen

Nótese que la hipérbola tiene dos asíntotas⁷.



Ejercicio final tema: 46

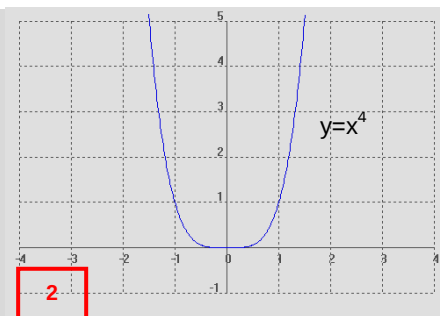
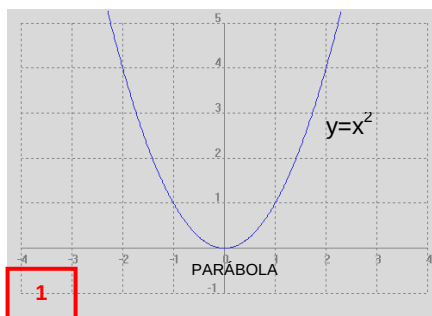
VIII.1) Parábola: Ya hemos visto repetidamente a lo largo del tema que toda curva de 2º grado es una parábola, y viceversa:

$$y = ax^2 + bx + c$$

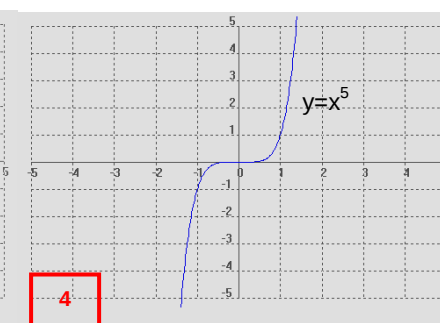
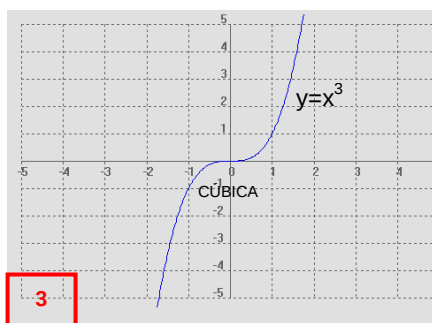
⁶ En realidad, para que se trate de una circunferencia, los coeficientes A, B y C deben cumplir una determinada relación, la cual por cierto nos permite conocer el centro C y el radio R de la circunferencia; pero todo ello excede los contenidos del presente curso...

⁷ Si éstas son $\perp$, entonces la hipérbola se llama equilátera, y su ecuación es de la forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; estas son precisamente las hipérbolas que habíamos visto en el apartado VI.1.

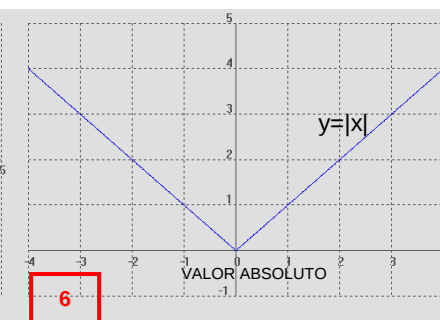
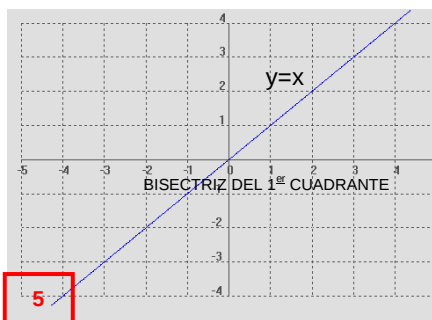
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS



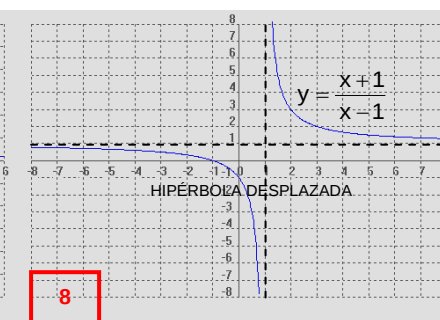
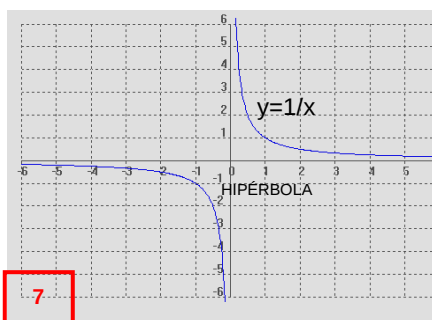
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.
(cuanto mayor es n , más acusada es la curvatura)



En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.
(cuanto mayor es n , más acusada es la curvatura)



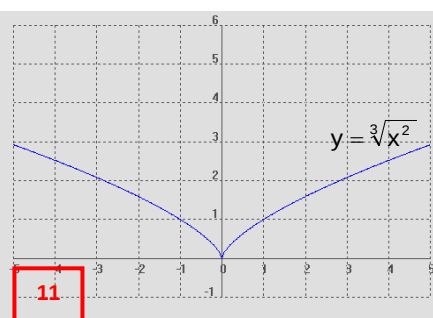
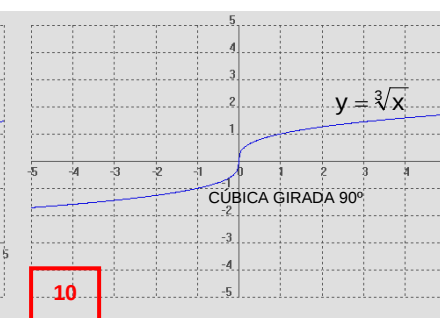
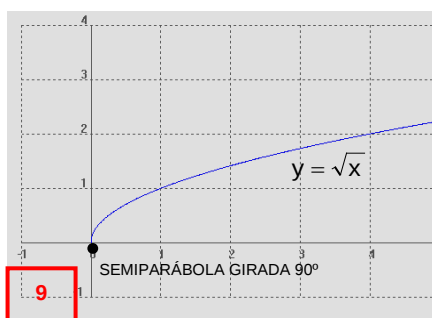
En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de $f(x)$ respecto al eje OY en el semiplano superior.

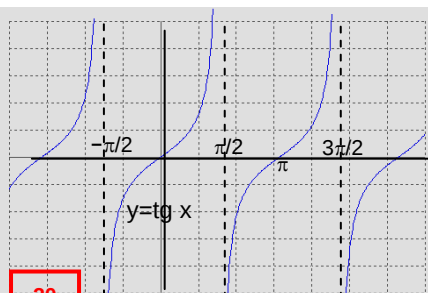
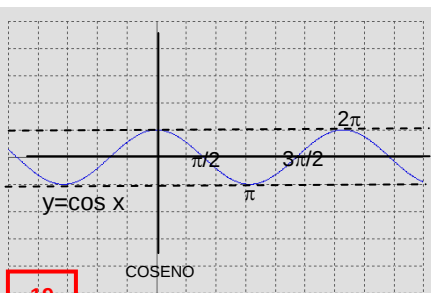
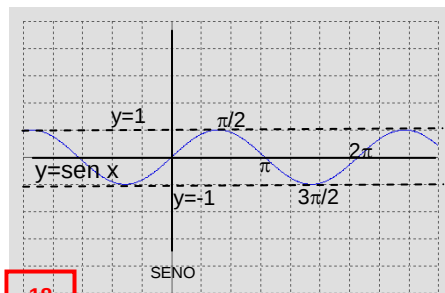
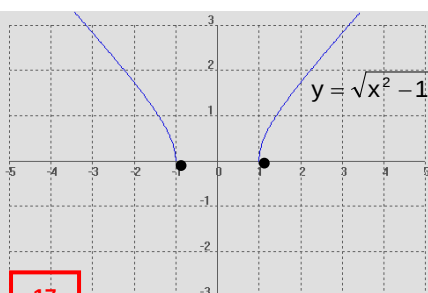
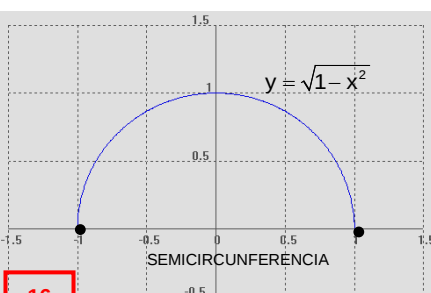
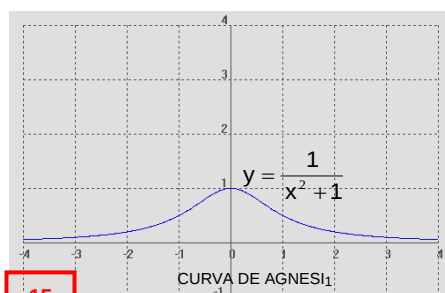
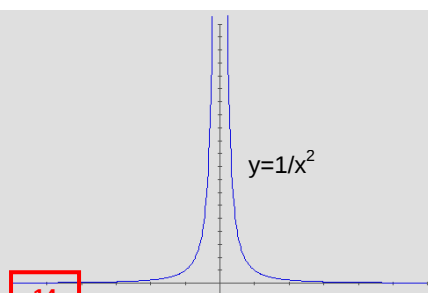
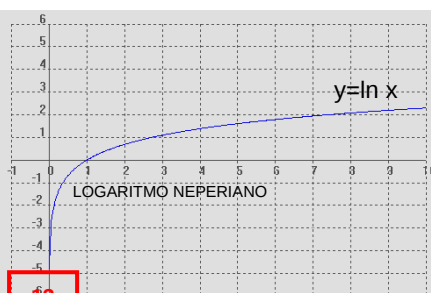
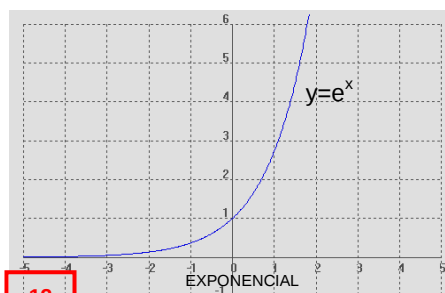


En general,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

donde $c \neq 0$, es una hipérbola.





Nombre	Símbolo	
	Minúscula	Mayúscula
1 Alfa	α	A
2 Beta	β	B
3 Gamma	γ	Γ
4 Delta	δ	Δ
5 Épsilon	ϵ	E
6 Zeta	ζ	Z
7 Eta	η	H
8 Theta	θ, ϑ	Θ
9 Iota	ι	I
10 Kappa	κ	K
11 Lambda	λ	Λ

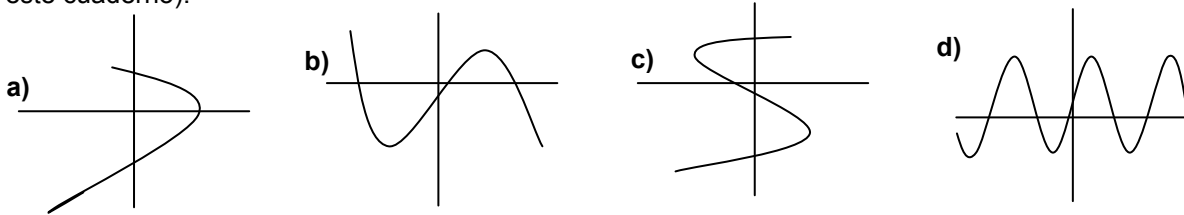
12	My	μ	M
13	Ny	ν	N
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	$\omicron$	O
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	P
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	T
20	Ípsilon	υ	Y
21	Fi	ϕ, φ	Φ
22	Ji	χ	X
23	Psi	ψ	Ψ
24	Omega	ω	Ω

1 En honor de María Agnesi, matemática italiana del siglo XVIII, que fue la primera en investigar las propiedades de las curvas de este tipo.

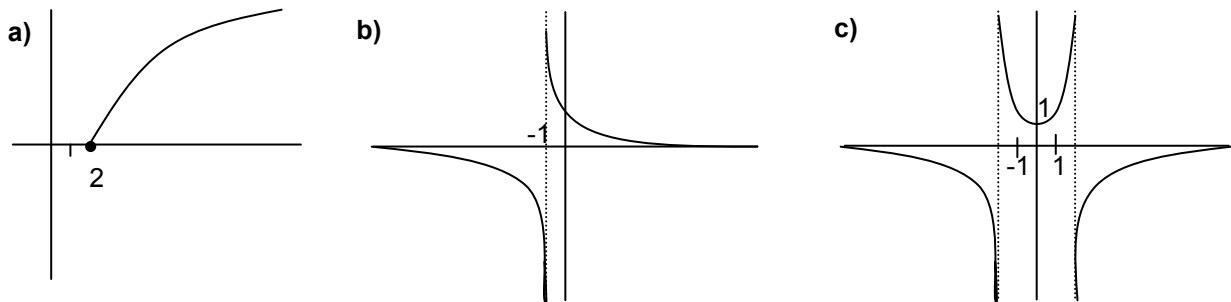
46 EJERCICIOS de FUNCIONES

Concepto de función:

1. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, se pide:
 - a) Razonar que se trata de una función.
 - b) Calcular $f(4)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-9)$, $f(1/4)$, $f(2)$ y $f(\sqrt{2})$
 - c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de -4
 - d) Razonar cuál es su $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$
2. Ídem para $f(x) = 2x + 1$
3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta, en este cuaderno):

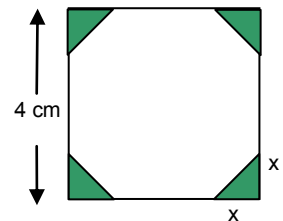


4. ¿Cuál es el $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ de cada una de estas funciones? (responder en este cuaderno):



5. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x .

- a) Escribir el área del octógono que resulta, en función de x (Sol: $A(x) = 16 - 2x^2$)
- b) ¿Cuál es el dominio y recorrido de esa función? (Sol: $\text{Dom}(f) = [0, 2]$; $\text{Im}(f) = [8, 16]$)



Gráfica de una función:

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

- i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
- ii) $\text{Dom}(f)$ e $\text{Im}(f)$ a la vista de la gráfica.
- iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ¿vértice?

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = 2$

f) $f(x) = \sqrt{x - 9}$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

h) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$? | i) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?

Cálculo del Dom(f):

7. Obtener **analíticamente**, de forma razonada, el Dom(f) de las funciones del ejercicio anterior, comprobando que se obtiene el mismo resultado que gráficamente.

8. Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \frac{8x}{x+5}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$

d) $f(x) = \frac{2}{4x - x^2}$

e) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 16}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 16}$

g) $f(x) = \sqrt{x+5}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

j) $f(x) = \sqrt{4-x}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 16}}$

o) $f(x) = \frac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2 - x - 6}}$

q) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$

s) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

t) $f(x) = \frac{14}{x^2 + 2x + 1}$

u) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x + 4}$

v) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

w) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2 - 4}}$

(Soluc: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} - \{-5\}$; c) $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$; d) $\mathbb{R} - \{0, 4\}$; e) $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$; f) $\mathbb{R}$; g) $[-5, \infty)$; h) $(-5, \infty)$; i) $[5/2, \infty)$; j) $(-\infty, 4]$; k) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$; l) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$; m) $\mathbb{R}$; n) $(-4, 0] \cup (4, \infty)$; o) $\mathbb{R} - \{3/2\}$; p) $[-3, -2) \cup (3, \infty)$; q) $(4, \infty)$; r) $\mathbb{R}$; s) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$; t) $\mathbb{R} - \{-1\}$; u) $\mathbb{R}$; v) $\mathbb{R}$; w) $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$)

Propiedades que se deducen de la gráfica de una función:

9. A la vista de sus gráficas, indicar la **continuidad** de las funciones del ejercicio 6.

10. A la vista de sus gráficas, indicar los **intervalos de crecimiento** y los posibles **M y m** relativos de las funciones del ejercicio 6.

11. Hallar analíticamente los posibles puntos de **corte con los ejes** de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

12. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones (en el caso de las cuatro primeras, dibujar además, únicamente con esa información, la gráfica):

a) $y = 2x - 6$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$

d) $f(x) = x^3 - x^2$

e) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{2x + 4}$

g) $f(x) = \sqrt{2x} + 4$

h) $y = \frac{x+4}{2x+2}$

i) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

k) $y = \sqrt{x^2 + 9}$

l) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

m) $y = \frac{x^2 + 4}{x + 2}$

n) $f(x) = \frac{4}{x - 4}$

o) $f(x) = x^4 - 1$

p) $y = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 8}$

q) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$

r) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$

(Soluc: **a)** (3,0),(0,-6); **b)** (-3,0),(1,0),(0,-3); **c)** (0,1); **d)** (0,0),(1,0); **e)** (-2,0),(2,0),(0,-2); **f)** (-2,0),(0,2); **g)** (0,4);
h) (-4,0),(0,2); **i)** ($\sqrt{3},0$), $(-\sqrt{3},0)$,(0,3); **j)** (-2,0),(1,0); **k)** (0,3); **l)** (1,0),(2,0),(3,0),(0,-6); **m)** (0,2); **n)** (0,-1);
o) (-1,0),(1,0),(0,-1))

13. Hallar analíticamente la posible simetría de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

14. Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4$	g) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	j) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 6}$	m) $y = \frac{5x^2}{x - 1}$
b) $f(x) = x^3$	h) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$	k) $y = \frac{3x}{2x^2 - 1}$	n) $f(x) = x + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$
c) $f(x) = x^4 - x^2$	i) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$	l) $f(x) = \frac{x}{x - 5}$	o) $y = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 + 3}$
d) $f(x) = x^2 - x^3$			
e) $f(x) = 2x - 3$			
f) $f(x) = x^5 - x^3$			

(Soluc: **a)** par; **b)** impar; **c)** par; **d)** no simétrica; **e)** no simétrica; **f)** impar; **g)** par; **h)** impar; **i)** impar; **j)** par;
k) impar; **l)** no simétrica; **m)** no simétrica; **n)** no simétrica; **o)** no simétrica)

15. **a)** ¿Una función puede ser simétrica par e impar al mismo tiempo? Razonar la respuesta.

b) Demostrar que toda función impar definida en el origen necesariamente pasa por éste

16. Estudiar los puntos de corte con los ejes y la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \frac{x + 3}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \frac{14}{x^3}$ **d)** $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$ **e)** $f(x) = \frac{4x + 12}{3x + 6}$

Estudio completo de una función (I):

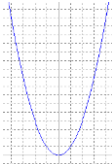
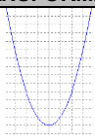
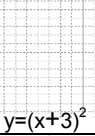
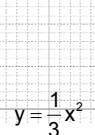
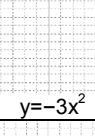
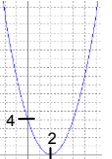
17. Dada $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ se pide: **i)** Dom(f) **ii)** Posible simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** ¿Es continua? **vii)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas.
ix) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de $y = -1$

18. Ídem para:

a) $f(x) = x^3 - 3x$	Antiimagen de $y = 2$	j) $f(x) = \frac{16 - 8x}{x^2}$	Antiimagen de $y = -2$
b) $y = \frac{x + 2}{x - 1}$	Antiimagen de $y = 1$	k) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$	Antiimagen de $y = -1/2$
c) $y = x^4 - 2x^2$	Antiimagen de $y = -1/2$	l) $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$	Antiimagen de $y = -1/2$
d) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$	Antiimagen de $y = 4/5$	m) $y = \frac{4x}{(x - 1)^2}$	
e) $f(x) = x^3 - 3x^2$	Antiimagen de $y = -2$	n) $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$	
f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$	Antiimagen de $y = 2$	o) $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$	Antiimagen de $y = -6$
g) $y = -x^3 + 12x$	Antiimagen de $y = -11$	p) $y = \sqrt{x^2 + 4}$	Antiimagen de $y = 0$
h) $y = x + \frac{9}{x}$		q) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$	Antiimagen de $y = 2$
i) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 9}$	Antiimagen de $y = -1/3$		

Transformaciones de funciones:

19. Completar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN		FUNCIÓN TRANSFORMADA	RESULTADO
 $y=x^2$	TRASLACIONES	$f(x)\pm k$	 $y=x^2+4$	TRASLACIÓN hacia ARRIBA
			 $y=x^2-2$	TRASLACIÓN hacia ABAJO
		$f(x\pm k)$	 $y=(x-2)^2$	TRASLACIÓN hacia la DERECHA
			 $y=(x+3)^2$	TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES		 $y=2x^2$	CONTRACCIÓN
			 $y=\frac{1}{3}x^2$	EXPANSIÓN
			 $y=-3x^2$	(Reflexión +) CONTRACCIÓN
 $y=x^2-4x+4$	REFLEXIONES		 $y=-(x^2-4x+4)=-x^2+4x-4$	REFLEXIÓN respecto al EJE X
			 $y=(-x)^2-4(-x)+4=x^2+4x+4$	REFLEXIÓN respecto al EJE Y

20. a) A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, representar las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 3$, $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$ y $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ (cada una en distintos ejes), indicando el nombre de la transformación obtenida.

b) Ídem con $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ y las funciones $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, $f(x) = \frac{1}{3(x^2 + 1)}$ y $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) Ídem con $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y las funciones $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ y $f(x) = -\sqrt[3]{x}$

21. A partir de la gráfica de la hipérbola $f(x) = \frac{1}{x}$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) las hipérbolas $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $f(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$

22. a) Representar gráficamente la hipérbola $f(x) = -\frac{1}{x-2} + 3$ partiendo de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

b) Ídem con $f(x) = \sqrt[3]{-x+2}$, partiendo de $f(x) = \sqrt[3]{x}$

23. Representar la función $f(x) = \text{Ent}(x)$

Estudio completo de una función (II):

24. Dadas las siguientes **funciones definidas a trozos** se pide: i) Gráfica. ii) Dom(f) e Im(f) iii) Posibles cortes con los ejes. iv) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. v) Continuidad. vi) Ecuación de las posibles asíntotas. vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ viii) Responder, además, a las preguntas particulares de cada apartado:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$

¿f(1), f(2) y f(3)?

¿Antiimagen de y=3?

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=16

Hallar la antiimagen de y=1

c) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

¿f(1) y f(-1)?

¿Antiimagen de y=2?

¿Antiimagen de y=-3?

d) $f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

¿f(1), f(3/2), f(2) y f(-3)?

¿Antiimagen de y=1?

¿Antiimagen de y=2?

¿Antiimagen de y=18?

e) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ ¿f(-6), f(0)?

f) $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2 - 4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

¿f(0) y f(3)?

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

¿f(0) y f(3)?

¿Qué x tiene por imagen y=0?

¿Qué x tiene por imagen y=3/2?

¿Qué x tiene por imagen y=1/2?

k) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

¿Vértice de la parábola?

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1 y -8

m) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=1

n) $f(x) = \begin{cases} x+15 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ -x+7 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=6

o) $f(x) = \begin{cases} x+10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 + 2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallar qué x tiene por imagen 0

p) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=4

q) $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } -2 < x \leq 6 \\ 24 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=14

r) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x-2 & \text{si } x \in [2, 5] \\ -x+6 & \text{si } x \in (5, \infty) \end{cases}$

¿Cuáles son las antiimágenes de 1 y 16?

s) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7 & \text{si } x < -3 \\ x-5 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

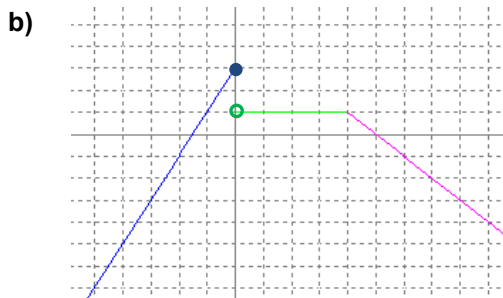
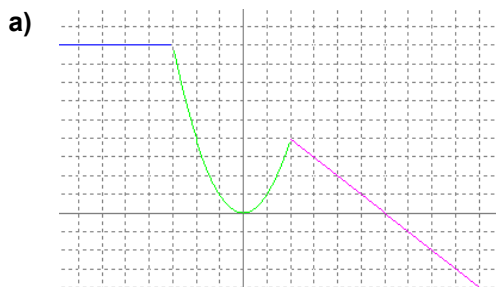
Hallar la antiimagen de -5

t) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

u) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x < -3 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \frac{5}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1

25. Hallar la expresión analítica –es decir, como función definida por ramas– de las siguientes funciones (puede indicarse en este cuaderno):



- 26.** Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: i) Definición analítica por ramas. ii) Gráfica. iii) Dom(f) e Im(f) iv) Posibles cortes con los ejes. v) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. vi) Continuidad. vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a) $f(x) = x - 1 $	b) $f(x) = -3x + 3 $	c) $f(x) = 3x + 6 $	d) $f(x) = x^2 - 5x + 6 $
e) $f(x) = x^2 - 4x + 3 $	f) $f(x) = -x^2 - 4x - 5 $	g) $f(x) = \left \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right $	h) $f(x) = x^2 - 4x + 5 $
i) $f(x) = -x^2 + x - 1 $	j) $f(x) = x^2 - 4x $	k) $f(x) = \left \frac{x}{x} \right $	l) $f(x) = 9 - x^2 $
m) $f(x) = \left \frac{1}{x} \right $	n) $f(x) = -x^2 + 4x - 4 $	o) $f(x) = 2x - x^2 $	

- 27.** Ídem (más elaboradas):

a) $f(x) = x + x$	b) $f(x) = x + 1 + x - 1 $	c) $f(x) = 3x + 6 - 2x - 2 $	d) $f(x) = \sqrt{\frac{ x }{x}}$
e) $f(x) = 2 - x $	f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$	g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -1 \\ (x - 1)^2 - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$	
h) $f(x) = x + x - 2 $	i) $f(x) = \frac{ x }{x} - x$	j) $f(x) = x + x + 1$	k) $f(x) = 2 x^3 - 8 $
l) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$			

- 28.** A partir de la gráfica de $f(x) = |x|$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) $f(x) = |x| + 3$, $f(x) = |x - 2|$, $f(x) = -|x|$, $f(x) = |2x|$ y $f(x) = \left| \frac{x}{3} \right|$

Composición de funciones. Función inversa:

- 29.** Hallar $f \circ g$ (léase *g compuesta con f*) y $g \circ f$ (*f compuesta con g*) en los siguientes casos:

a) $f(x) = 3x - 5$	$g(x) = 1/x$	c) $f(x) = 1/x$	$g(x) = \sqrt{x}$	e) $f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
b) $f(x) = x^2$	$g(x) = 3x - 5$	d) $f(x) = x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$		

- 30.** ¿Se puede componer una función consigo misma? ¿Qué obtenemos si hacemos $(f \circ f)(x)$ para $f(x) = 2x + 1$?
Hacerlo también para $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$

- 31.** Comprobar que las siguientes funciones son inversas y representarlas gráficamente sobre los mismos ejes:

a) $f(x) = 2x$	$g(x) = \frac{x}{2}$	b) $f(x) = x^3$	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	c) $f(x) = x + 1$	$g(x) = x - 1$
----------------	----------------------	-----------------	----------------------	-------------------	----------------

¿Qué conclusión se obtiene a la vista de sus gráficas?

32. Hallar la función inversa de (y comprobar):

a) $y = \sqrt{x+4}$

b) $y = 3 + 2(x-1)$

c) $y = 2\sqrt{x+1}$

d) $y = 3/x$

e) $y = x^2 - 1$

(Soluc: f coincide con f^{-1})

f) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

g) $y = 2 + \sqrt{x}$

h) $y = \frac{x+1}{3x-1}$

(Soluc: f coincide con f^{-1})

Problemas de aplicación:

- 33.** Una fotocopidora cobra 5 cent por cada fotocopia, pero ofrece también un servicio de multicopia por el que cobra 50 cent por el cliché y 0,15 cent por cada copia de un mismo ejemplar. **a)** Obtener, para cada caso, la función que nos muestra lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. **b)** Representar ambas funciones ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista? **c)** Resolverlo analíticamente, mediante una inecuación. (Sol: **b)** A partir de 15 copias inclusive)

- 34.** Para fabricar un determinado producto hace falta un gasto inicial fijo de 1000 € más 50 € por cada unidad producida. Se pide: **a)** Razonar que el coste por unidad de fabricación disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función

$$y = \frac{50x + 1000}{x}$$

- b)** Hacer la gráfica correspondiente ¿Cuál es su Dom(f)? **c)** ¿Cuál será el coste cuando el número de unidades se haga muy grande? (Sol: **c)** El coste tenderá a ser de 50 €)

- 35.** En una academia de mecanografía han llegado a la conclusión de que el número de pulsaciones por minuto de un alumno promedio viene dado por la función

$$y = \frac{400(x+1)}{x+25}$$

donde x representa el número de clases recibidas. Se pide: **a)** Representarla gráficamente ¿Cuál es su Dom(f)? **b)** ¿Cuántas clases necesita un alumno para conseguir 300 pulsaciones? **c)** Según este modelo, ¿un alumno podría llegar a tener más de 400 pulsaciones? ¿Por qué? (Sol: **b)** A partir de 71 clases. **c)** NO)

- 36.** En una fábrica de montajes se ha estimado que el número de montajes realizados por un aprendiz dependen de los días de prácticas, según la función:

$$y = \frac{60x}{x+5}$$

donde x es el tiempo, en días. **a)** ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el día vigesimoquinto? **b)** ¿Cuántos días tiene que practicar para superar los 60 montajes al día? **c)** Dibujar la gráfica de $f(x)$ (Sol: **a)** 10 y 50 respectivamente **b)** Nunca)

- 37.** Un técnico de una compañía ha calculado que los costes de producción (en €) de un determinado producto vienen dados por la siguiente expresión:

$$C(x)=x^2+20x+40000$$

donde x representa el número de unidades producidas. Por otra parte, cada unidad se vende al público a un precio de 520 €.

- a) Expresar, en función del número de artículos producidos x , el beneficio y representarlo gráficamente.
b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

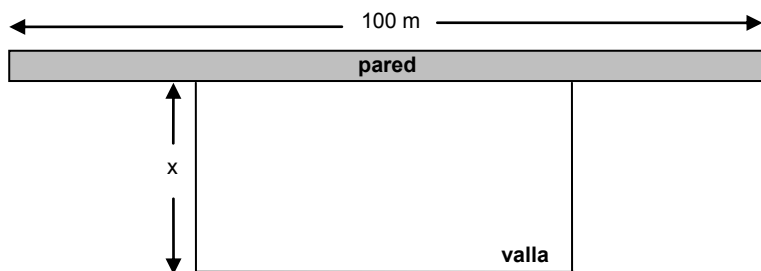
(Sol: **b**) 250 unidades; 22500 €)

38. La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

- a) Representar la función que describe este enunciado y determinar su expresión analítica, como función definida por ramas.
b) Indicar cuál es su dominio y recorrido. (Sol: **b**) $Dom(f)=[0,25]$; $Im(f)=[0,20]$)

Resolución gráfica de problemas de optimización:

39. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro. a) Razonar que el valor de la superficie para una base cualquiera x viene dado por $S(x)=2x-x^2$ b) Representar gráficamente la función anterior ¿Cuál es el valor de la base para el que se obtiene la superficie máxima? c) ¿Cuánto vale dicha superficie? (Sol: **b**) 1 m **c**) 1 m²)



40. Con 100 m de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 100 m de largo, como indica la figura.

- a) Llamar x a uno de los lados y construir la función que nos da el área. Representarla gráficamente ¿Cuál es su $Dom(f)$?

- b) ¿Cuáles serán las dimensiones del recinto de área máxima?
c) ¿Cuánto vale esa área? (Sol: **a**) $S(x)=100x-2x^2$ **b**) 25 m x 50 m **c**) 1250 m²)

41. Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderán a 40 cent/kg. Se estima que cada día que pase se estropeará 1 kg, pero el precio aumentará 1 cent/kg.

- a) Razonar que el beneficio que obtendremos al vender pasados x días viene dado por $B(x)=-x^2+160x+8000$
b) Representarla gráficamente y hallar su dominio de definición.
c) ¿Cuándo hemos de venderlas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio? (Sol: **c**) Interesará venderlas pasados 80 días)

42. Una cooperativa ha cosechado 200 000 kg de tomates que puede vender a 25 cent/kg. Se sabe que, por cada semana que transcurre, se pierden 4 000 kg de tomates pero el precio de cada kg aumenta en 5 cent. Expresar el valor total de los tomates en función del tiempo. Representar la gráfica de dicha función e indicar al cabo de cuántas semanas nos interesará vender. (Sol: $B(x)=-20\,000x^2+900\,000x+5\,000\,000$; 22,5 semanas $\Rightarrow$ 151 250 €)

Cónicas:

43. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **circunferencia** y, en caso afirmativo, dibujar su gráfica e indicar el centro y el radio:

a) $x^2 + y^2 + 25 = 0$ (Soluc: $C(0,0); R=5$)

b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ (Soluc: $C(2,-1); R=3$)

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$ (Soluc: $C(5,-3); R=7$)

e) $x^2 + 2y^2 - 3x - 6y + 5 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

44. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **elipse** y, en caso afirmativo, obtener su gráfica:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y}{4} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 4$

d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

f) $25x^2 + 9y^2 = 225$

45. Hallar la ecuación reducida o canónica de una elipse de semieje mayor 4 y menor 3. Comprobarlo gráficamente.

46. Representar las siguientes **hipérbolas**:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

d) $4y^2 - x^2 = 4$

e) $4x^2 - 9y^2 = 36$

f) $2x^2 - y^2 + 2 = 0$