Funciones, optimización e integrales

Soluciones resueltas paso a paso · 2.º Bachillerato

Guía con la resolución completa de los **9 ejercicios** de la ficha: estudio de funciones, problemas de optimización, dos integrales y dos preguntas de EBAU 2022. Cada ejercicio incluye gráfica (cuando procede), comprobaciones y el resultado destacado.

Esquema: estudio completo de una función

1. Dominio y puntos de corte con los ejes (x=0 → y=f(0); y=0 → raíces).
2. Asíntotas: verticales (donde el denominador se anula y el numerador no), horizontales (límites en ±∞) y oblicuas y = mx + n (cuando el grado del numerador supera en 1 al del denominador: se divide).
3. Monotonía y extremos: se resuelve f'(x)=0 y se estudia el signo de f' (f'>0 crece, f'<0 decrece).
4. Curvatura e inflexión: se resuelve f''(x)=0 y se estudia el signo de f'' (f''>0 convexa ∪, f''<0 cóncava ∩).
5. Esbozo: se juntan asíntotas, puntos notables y el comportamiento de cada tramo.

Esquema: problemas de optimización

1. Identifica qué hay que **maximizar o minimizar** y escribe la fórmula (área, volumen…).
2. Escribe la **condición** del enunciado (perímetro, suma…) y **despeja** una variable para dejar la función con **una sola variable**.
3. Deriva e iguala a 0 → candidatos. **4.** Comprueba con la 2.ª derivada (f''<0 máximo, f''>0 mínimo).
5. Calcula todas las dimensiones que pide el enunciado.

Índice

Nº	Ejercicio	Resultado
7a	$g(x) = (2x^2+x-10)/(x^2-4)$	AV x=−2, AH y=2, hueco en (2, 9/4)
7b	$f(x) = (2x^2-1)/(x+1)$	AV x=−1, AO y=2x−2, máx y mín
13	Triángulo rectángulo, catetos suman 15	7,5 y 7,5 → A = 28,125
19	Ventana rectángulo + semicírculo, P = 6 m	base $12/(4+\pi) \approx 1{,}68$ m; alto $6/(4+\pi) \approx 0{,}84$ m
31	$\int e^x/(1-e^x)\,dx$	$-\ln\lvert 1-e^x\rvert + C$
37	$\int 5/(1+3x^2)\,dx$	$(5\sqrt{3}/3)\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\,x) + C$
49	Prisma de base cuadrada, perímetro cara = 30	base 10 cm, altura 5 cm → V = 500 cm³
EBAU Jun-22	$f(x) = (x^2+3)/(x-1)$	máx (−1,−2), mín (3,6)
EBAU Jul-22	$f(x) = 2x^2/(1-x)$	mín (0,0), máx (2,−8)

7a Estudio de $g(x) = (2x^2 + x - 10)/(x^2 - 4)$

crecimiento, extremos, curvatura, asíntotas y esbozo

1 · Simplificación y dominio

Dominio: $x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$, luego **Dom g = $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$**.

Factorizamos. En el numerador, $2x^2 + x - 10 = 0 \Longrightarrow x = [-1 \pm \sqrt{(1+80)}]/4 = (-1 \pm 9)/4 \Longrightarrow x = 2$ o $x = -5/2$, así que $2x^2 + x - 10 = 2(x - 2)(x + 5/2) = (x - 2)(2x + 5)$. El denominador es $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Entonces:

$$g(x) = (x - 2)(2x + 5) / [(x - 2)(x + 2)] = (2x + 5)/(x + 2) \quad (x \neq \pm 2)$$

Dividiendo: **$g(x) = 2 + 1/(x + 2)$** (forma muy cómoda para todo el estudio).

2 · Puntos de corte

Con el eje Y: $g(0) = -10/-4 =$ **5/2** → (0, 5/2). Con el eje X: $2x + 5 = 0 \Longrightarrow x = -5/2$ → **(−5/2, 0)** (la raíz x = 2 del numerador original no vale: no está en el dominio).

3 · Asíntotas y discontinuidades

• **x = 2: discontinuidad evitable.** $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim (2x+5)/(x+2) = 9/4$: el límite es finito, hay un «hueco» en el punto **(2, 9/4)**, no hay asíntota.

• **Asíntota vertical x = −2:** el numerador vale $2(-2)+5 = 1 \neq 0$. Laterales: $\lim_{x\to -2^+} g = 1/0^+ = +\infty$ y $\lim_{x\to -2^-} g = 1/0^- = -\infty$.

• **Asíntota horizontal:** $\lim_{x\to \pm\infty} g(x) = \lim (2 + 1/(x+2)) = 2 \Longrightarrow$ **y = 2** (por ambos lados). Por tener horizontal, no hay oblicua.

4 · Monotonía y extremos

$$g'(x) = -1/(x + 2)^2 < 0 \quad \text{para todo x del dominio}$$

g' nunca se anula y es siempre negativa: **g es decreciente** en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$. **No tiene máximos ni mínimos.**

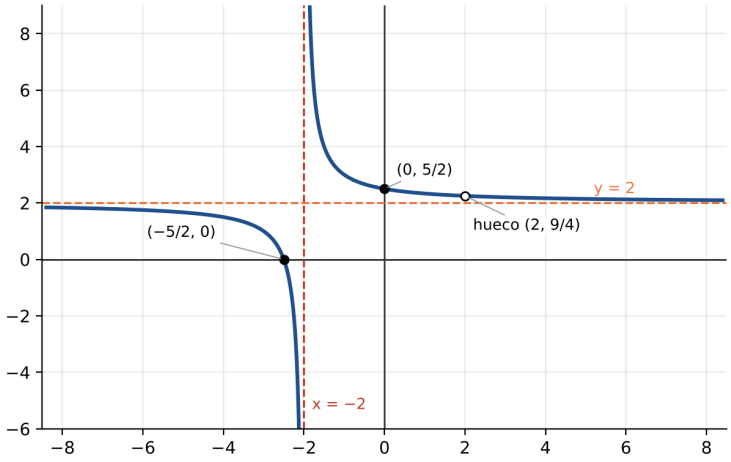
5 · Curvatura e inflexión

$$g''(x) = 2/(x + 2)^3$$

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2) \cup (2, +\infty)$
Signo de g''	−	+
Curvatura	cóncava ∩	convexa ∪

g'' no se anula; en x = −2 cambia de signo pero ese punto no pertenece al dominio, así que **no hay puntos de inflexión**.

6 · Esbozo



✔ AV x = −2 · AH y = 2 · hueco en (2, 9/4) · decreciente · sin extremos ni inflexión

7b Estudio de f(x) = (2x² − 1)/(x + 1)

crecimiento, extremos, curvatura, asíntotas y esbozo

1 · Dominio y cortes

Dom f = ℝ \ {−1}. Eje Y: f(0) = −1 → **(0, −1)**. Eje X: 2x² − 1 = 0 ⟹ x = ±1/√2 ≈ ±0,707 → **(−0,707; 0)** y **(0,707; 0)**.

2 · Asíntotas

Vertical x = −1: numerador en −1: 2 − 1 = 1 ≠ 0. $\lim_{x\to -1^+} f = 1/0^+ = +\infty$; $\lim_{x\to -1^-} f = 1/0^- = -\infty$.

Horizontal: el grado del numerador (2) supera al del denominador (1): $\lim_{x\to \pm\infty} f = \pm\infty$, no hay.

Oblicua y = mx + n: dividimos 2x² − 1 entre x + 1 (Ruffini con −1): cociente 2x − 2, resto 1.

$$f(x) = 2x - 2 + 1/(x+1) \implies \mathbf{y = 2x - 2}$$

(Con límites: m = lím f/x = 2; n = lím [f − 2x] = lím (−2x − 1)/(x + 1) = −2 ✓). Como 1/(x+1) es positivo a la derecha de −1, la curva está *sobre* la oblicua en x > −1 y *bajo* ella en x < −1.

3 · Monotonía y extremos

$$f'(x) = [4x(x+1) - (2x^2-1)]/(x+1)^2 = (2x^2 + 4x + 1)/(x+1)^2 = 2 - 1/(x+1)^2$$

f'(x) = 0 ⟹ 2x² + 4x + 1 = 0 ⟹ x = [−4 ± √(16−8)]/4 = −1 ± √2/2 ⟹ **$x_1 \approx -1{,}707$** y **$x_2 \approx -0{,}293$**.

Intervalo	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, -1)$	$(-1, x_2)$	$(x_2, +\infty)$
Signo de f'	+	−	−	+
f	crece ↗	decrece ↘	decrece ↘	crece ↗

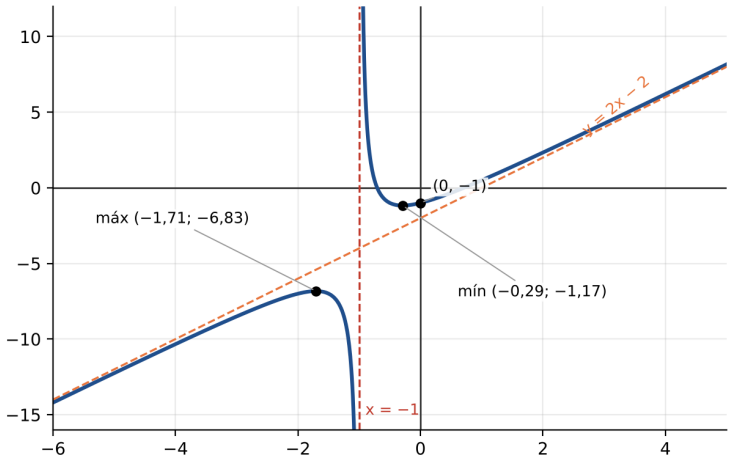
Máximo relativo en $x_1 = -1 - \sqrt{2}/2$: f = 2x−2+1/(x+1) = (−2−√2−2) + (−√2) = **−4 − 2√2 ≈ −6,83** → (−1,71; −6,83). **Mínimo relativo** en $x_2 = -1 + \sqrt{2}/2$: f = (−2+√2−2) + √2 = **−4 + 2√2 ≈ −1,17** → (−0,29; −1,17).

4 · Curvatura e inflexión

$$f''(x) = 2/(x+1)^3$$

No se anula nunca: **no hay puntos de inflexión**. Si x > −1: f'' > 0, **convexa ∪**; si x < −1: f'' < 0, **cóncava ∩**. (Coherente: el máximo está en la zona cóncava y el mínimo en la convexa).

5 · Esbozo



✔ AV x=−1 · AO y=2x−2 · máx (−1,71; −6,83) · mín (−0,29; −1,17) · sin inflexión

13 Triángulo rectángulo de área máxima

catetos que suman 15

Enunciado. *De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 15, averigua cuál tiene área máxima.*

Paso 1 · Variables y función a maximizar

Sean x e y los catetos. Condición: $x + y = 15 \Longrightarrow y = 15 - x$, con $0 < x < 15$. El área de un triángulo rectángulo es base·altura/2:

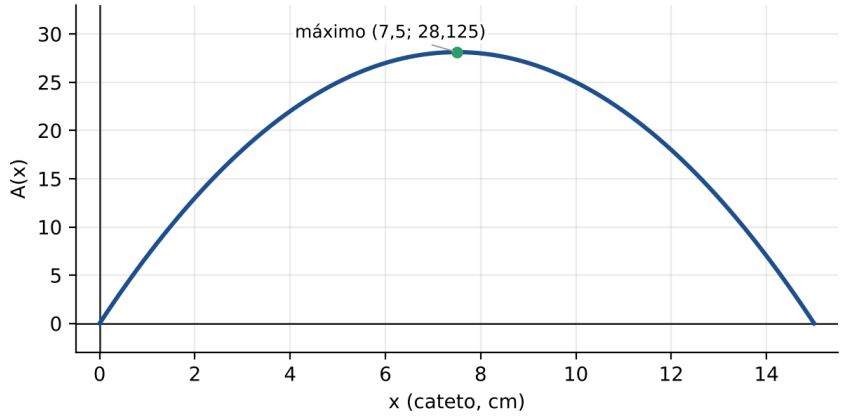
$$A(x) = x\cdot(15 - x)/2 = (15x - x^2)/2$$

Paso 2 · Derivada y puntos críticos

$$A'(x) = (15 - 2x)/2 = 0 \implies x = 15/2 = 7{,}5$$

Paso 3 · Comprobación de que es máximo

$A''(x) = -1 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 7{,}5$ hay un **máximo**. (También: $A' > 0$ si $x < 7{,}5$ y $A' < 0$ si $x > 7{,}5$; en los extremos x=0 y x=15 el área es 0.)



Paso 4 · Dimensiones y área

$x = 7{,}5$ e $y = 15 - 7{,}5 = 7{,}5$: el triángulo es **isósceles**. Área máxima: $A = 7{,}5\cdot 7{,}5/2 = 225/8 = 28{,}125$.

✔ Catetos de 7,5 y 7,5 → área máxima = 28,125 u²

19 Ventana de máxima luz

rectángulo + semicírculo, perímetro 6 m

> ***Enunciado.*** *Se considera una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior, un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 6 m, calcula las dimensiones de la parte rectangular para que entre un máximo de luz. (2 puntos)*

Paso 1 · Variables

El semicírculo se apoya sobre el lado superior del rectángulo, así que su diámetro es la base del rectángulo. Sea **r** el radio del semicírculo: la base mide **2r** y sea **h** la altura del rectángulo.

Paso 2 · Condición (perímetro)

El perímetro de la ventana está formado por la base, los dos lados verticales y la semicircunferencia (el diámetro superior no cuenta, es interior):

$$2r + 2h + \pi r = 6 \implies h = (6 - 2r - \pi r)/2 = 3 - r - \pi r/2$$

Paso 3 · Función a maximizar

Máxima luz = máxima superficie = rectángulo + semicírculo:

$$A = 2r\cdot h + \pi r^2/2 = 2r(3 - r - \pi r/2) + \pi r^2/2 = 6r - 2r^2 - \pi r^2 + \pi r^2/2$$

$$\mathbf{A(r) = 6r - (2 + \pi/2)\cdot r^2} \quad (\text{con } 0 < r < 6/(2+\pi) \approx 1{,}17 \text{ para que } h > 0)$$

Paso 4 · Derivada y máximo

$$A'(r) = 6 - (4 + \pi)\cdot r = 0 \implies \mathbf{r = 6/(4 + \pi) \approx 0{,}84\ m}$$

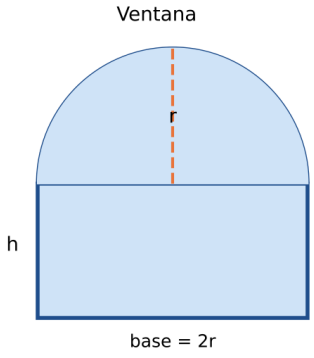
$A''(r) = -(4 + \pi) < 0 \implies$ **máximo**.

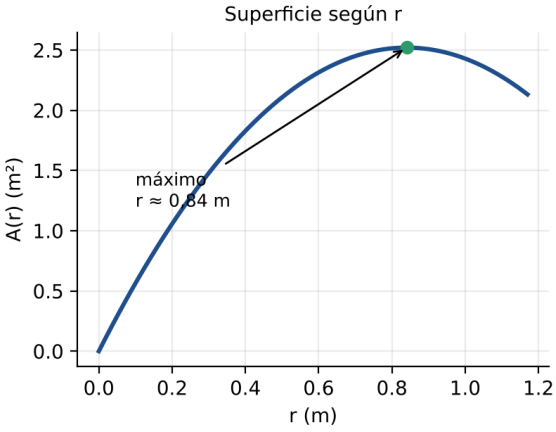
Paso 5 · Dimensiones de la parte rectangular

Base: $2r = \mathbf{12/(4+\pi) \approx 1{,}68\ m}$.

Altura: $h = 3 - r(1 + \pi/2) = 3 - 3(2+\pi)/(4+\pi) = (12 + 3\pi - 6 - 3\pi)/(4+\pi) = \mathbf{6/(4+\pi) \approx 0{,}84\ m}$.

Curiosamente h = r: la altura del rectángulo coincide con el radio. Superficie máxima: $A = 18/(4+\pi) \approx 2{,}52\ m^2$.





✔ Rectángulo de 12/(4+π) ≈ 1,68 m de base por 6/(4+π) ≈ 0,84 m de altura

31 $\int e^x/(1-e^x)\,dx$

cambio de variable $t = e^x$

Paso 1 · Cambio de variable

Sea $t = e^x$. Entonces $dt = e^x\,dx$, que es justo el numerador de la integral.

Paso 2 · Sustitución

$$\int e^x/(1-e^x)\,dx = \int dt/(1-t)$$

Paso 3 · Integración

Es una integral logarítmica. Como $(1-t)' = -1$, necesitamos un signo menos para completar la derivada del denominador:

$$\int dt/(1-t) = -\int (-1)/(1-t)\,dt = -\ln|1-t| + C$$

Paso 4 · Deshacer el cambio

✔ $\int e^x/(1-e^x)\,dx = -\ln|1-e^x| + C$

Comprobación: $d/dx[-\ln|1-e^x|] = -(-e^x)/(1-e^x) = e^x/(1-e^x)$ ✓.

37 $\int 5/(1+3x^2)\,dx$

integral de tipo arcotangente

Paso 1 · Reconocer el tipo

Recordamos: $\int du/(1+u^2) = \operatorname{arctg} u + C$. Debemos escribir $3x^2$ como un cuadrado: $3x^2 = (\sqrt{3}\cdot x)^2$.

Paso 2 · Cambio $u = \sqrt{3}\cdot x$

$u = \sqrt{3}\,x \Longrightarrow du = \sqrt{3}\,dx \Longrightarrow dx = du/\sqrt{3}$.

$$\int 5/(1+3x^2)\,dx = \int 5/(1+u^2)\cdot du/\sqrt{3} = (5/\sqrt{3})\int du/(1+u^2) = (5/\sqrt{3})\cdot\operatorname{arctg} u + C$$

Paso 3 · Deshacer el cambio y racionalizar

✔ $\int 5/(1+3x^2)\,dx = (5/\sqrt{3})\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cdot x) + C = (5\sqrt{3}/3)\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cdot x) + C$

Comprobación: $d/dx[(5/\sqrt{3})\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)] = (5/\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}/(1+3x^2) = 5/(1+3x^2)$ ✓.

49 Prisma de base cuadrada y volumen máximo

perímetro de una cara lateral = 30 cm

Enunciado. *De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.*

Paso 1 · Variables

Sea x el lado de la base cuadrada y h la altura. Cada cara lateral es un rectángulo de lados x y h.

Paso 2 · Condición

$$2x + 2h = 30 \implies h = 15 - x \quad (0 < x < 15)$$

Paso 3 · Función a maximizar

$$V(x) = x^2 \cdot h = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

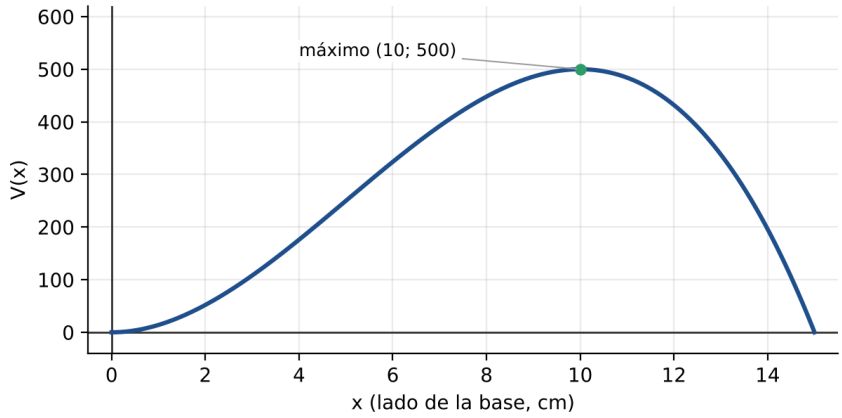
Paso 4 · Derivada y puntos críticos

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x) = 0 \implies x = 0 \ \text{ o } \ x = 10$$

$x = 0$ no tiene sentido (volumen nulo), así que el candidato es **$x = 10$**.

Paso 5 · Comprobación

$V''(x) = 30 - 6x \implies V''(10) = -30 < 0 \implies$ **máximo**.



Paso 6 · Dimensiones

Base: $x = 10$ cm (10×10). Altura: $h = 15 - 10 = 5$ cm. Volumen máximo: $V = 10^2 \cdot 5 = 500$ cm³.

✔ Base cuadrada de 10 cm de lado y altura 5 cm → V = 500 cm³

EBAU Junio 2022 · Bloque 2.A

f(x) = (x² + 3)/(x − 1)

> ***Enunciado.*** *(a) (1 pto) Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga. (b) (1 pto) Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad. (c) (0,5 ptos) A partir de los resultados obtenidos, realiza un esbozo de la gráfica de f.*

a) Dominio y asíntotas

Dominio: $x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. **Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$**.

Asíntota vertical x = 1: el numerador en x = 1 vale 4 ≠ 0. $\lim_{x\to 1^+} f = 4/0^+ = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} f = 4/0^- = -\infty$.

Horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} (x^2+3)/(x-1) = \pm\infty$ (grado 2 sobre grado 1): no hay.

Oblicua: dividimos $x^2 + 3$ entre $x - 1$ (Ruffini con 1): cociente $x + 1$, resto 4.

$$f(x) = x + 1 + 4/(x - 1) \Longrightarrow \mathbf{y = x + 1}$$

b) Extremos y curvatura

$$f'(x) = [2x(x-1) - (x^2+3)]/(x-1)^2 = (x^2 - 2x - 3)/(x-1)^2 = (x - 3)(x + 1)/(x-1)^2$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 3$ o $x = -1$. El denominador $(x-1)^2$ es siempre positivo, así que el signo lo da $(x - 3)(x + 1)$:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de f'	+	−	−	+
f	crece ↗	decrece ↘	decrece ↘	crece ↗

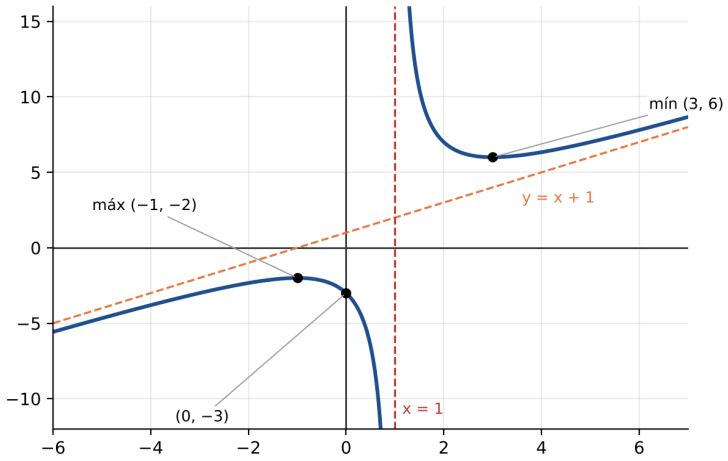
Máximo relativo en x = −1: f(−1) = 4/(−2) = −2 → **(−1, −2)**. **Mínimo relativo en x = 3:** f(3) = 12/2 = 6 → **(3, 6)**.

$$f''(x) = 8/(x - 1)^3$$

f'' no se anula: **no hay puntos de inflexión**. Para x > 1: f'' > 0 ⟹ **convexa ∪** en $(1, +\infty)$. Para x < 1: f'' < 0 ⟹ **cóncava ∩** en $(-\infty, 1)$.

Corte con los ejes: f(0) = −3 → (0, −3); no corta al eje X porque $x^2 + 3 > 0$.

c) Esbozo



✔ máx (−1, −2) · mín (3, 6) · cóncava en (−∞,1) · convexa en (1,+∞) · AV x=1 · AO y=x+1

EBAU Julio 2022 · Bloque 2.A

$f(x) = 2x^2/(1-x)$

Enunciado. *(a) (0,75 ptos) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas. (b) (1,25 ptos) Halla, en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (c) (0,5 ptos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.*

a) Dominio y asíntotas

Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ($1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$).

Asíntota vertical x = 1: numerador $2 \neq 0$. $\lim_{x\to 1^+} f = 2/0^- = -\infty$ ($1-x$ es negativo) y $\lim_{x\to 1^-} f = 2/0^+ = +\infty$.

Horizontal: no hay (grado 2 sobre grado 1).

Oblicua: $2x^2 = (1-x)(-2x-2) + 2$ (comprobación: $(1-x)(-2x-2) = 2x^2 - 2$). Por tanto:

$$f(x) = -2x - 2 + 2/(1-x) \implies \mathbf{y = -2x - 2}$$

b) Extremos, inflexión y monotonía

$$f'(x) = [4x(1-x) + 2x^2]/(1-x)^2 = (4x - 2x^2)/(1-x)^2 = 2x(2-x)/(1-x)^2$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $x = 2$. El denominador es positivo, así que el signo lo da $2x(2-x)$ (parábola cóncava, positiva entre sus raíces):

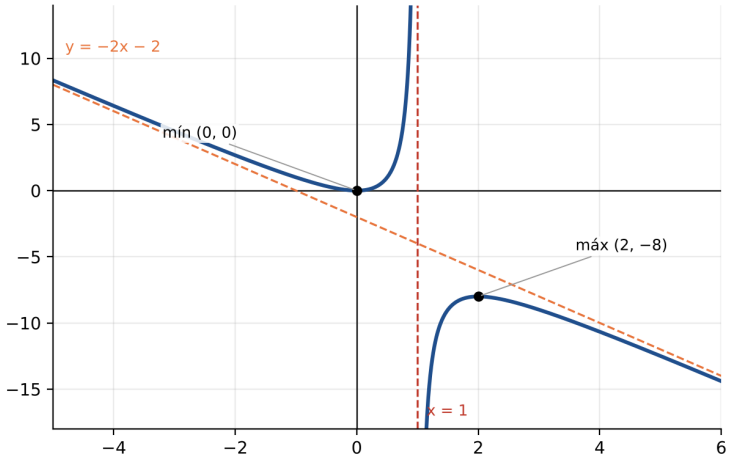
Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de f'	−	+	+	−
f	decrece ↘	crece ↗	crece ↗	decrece ↘

Mínimo relativo en x = 0: $f(0) = 0 \to$ **(0, 0)**. **Máximo relativo en x = 2:** $f(2) = 8/(-1) = -8 \to$ **(2, −8)**.

$$f'(x) = -2 + 2/(1-x)^2 \implies f''(x) = 4/(1-x)^3$$

f'' no se anula $\Longrightarrow$ **no hay puntos de inflexión**. Para $x < 1$: $f'' > 0$, convexa ∪ (donde está el mínimo ✓). Para $x > 1$: $f'' < 0$, cóncava ∩ (donde está el máximo ✓).

c) Esbozo



✓ mín (0, 0) · máx (2, −8) · sin inflexión · AV x=1 · AO y=−2x−2