Repaso de integrales

Cálculo de áreas · Soluciones resueltas paso a paso

Esta guía recoge la resolución completa de los **8 ejercicios** de la ficha (los ejercicios 3 y 300 son idénticos y se resuelven juntos), con gráficas, tablas de signos y comprobaciones. Al final de cada ejercicio encontrarás el resultado destacado.

Método general para calcular áreas con integrales

1. Encuentra los **puntos de corte** (con el eje X o entre las dos curvas) resolviendo la ecuación correspondiente.
2. Decide los **intervalos de integración**: los límites dados y los puntos de corte que caen dentro de ellos.
3. Estudia el **signo** de la función (o qué curva queda por encima) en cada intervalo.
4. Plantea el área como suma de integrales, tomando siempre *(función de arriba) − (función de abajo)*, es decir, con valor absoluto.
5. Calcula con la **regla de Barrow**: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde F es una primitiva de f.
6. Comprueba que el resultado es **positivo** (un área nunca es negativa) y que es razonable con el dibujo.

Dos fórmulas básicas.
• Entre una curva y el eje X: Área = $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (se trocea donde f cambia de signo).
• Entre dos curvas con $f(x) \geq g(x)$ en [a,b]: Área = $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Índice

Nº	Ejercicio	Resultado
3 y 300	Área de x^3+7x-6, eje X, x=0 y x=3	≈ 38,67 u²
5	Recinto entre $y = 9 - x^2$ e y = 0	36 u²
8	Recinto entre $y = x^3$ e $y = x^2+2x$	37/12 u²
1	Recinto entre $f(x)=4-x^2$ y $g(x)=x^2+2x$	9 u²
6	Área de x^3-3x^2-x+3, eje X, x=0 y x=4	12 u²
EBAU Junio	$f(x)=(x-2)/(x^2+1)$: primitiva y área en [0,1]	$\pi/2 - \frac{1}{2}\cdot\ln 2 \approx 1{,}224$ u²
EBAU Julio	Primitivas de $(x-1)/(2x+1)$ y área entre x^2 y x^3	1/12 u²

3 · 300 Área limitada por f(x) = x³ + 7x − 6

con el eje X y las rectas x = 0 y x = 3

Enunciado. *a) Representa razonadamente la región plana limitada por la gráfica de f(x) = x³+7x−6, el eje de abscisas y las rectas x=0, x=3. b) Halla el área de esa región.*

a) Representación razonada

Paso 1 · Derivada y monotonía. f'(x) = 3x² + 7. Como 3x² ≥ 0, se cumple f'(x) ≥ 7 > 0 para todo x, luego **f es estrictamente creciente** en ℝ. Es decir, no tiene máximos ni mínimos relativos.

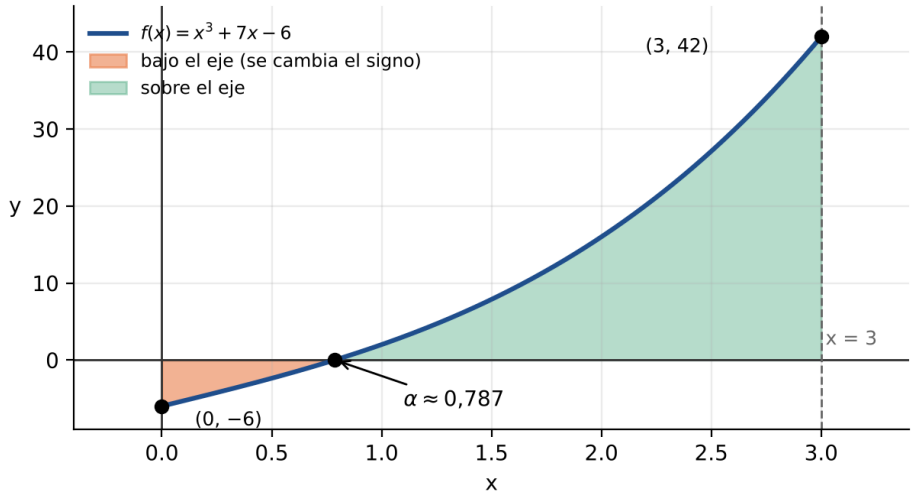
Paso 2 · Valores en los extremos. f(0) = −6 y f(3) = 27 + 21 − 6 = 42.

Paso 3 · Corte con el eje X. Como f es continua, f(0) < 0 y f(3) > 0, el teorema de Bolzano asegura una raíz en (0,3); y por ser estrictamente creciente, es **única**. La llamamos α. Busquemos dónde está:

x	0	0,5	0,78	0,79	1	3
f(x)	−6	−2,375	−0,065	+0,023	2	42

Luego α ∈ (0,78 ; 0,79); con más precisión **α ≈ 0,7874**. Las posibles raíces enteras (divisores de 6: ±1, ±2, ±3, ±6) no anulan f (por ejemplo f(1)=2), así que α **no es un número racional** y trabajaremos con ella de forma exacta mediante la relación α³ + 7α − 6 = 0.

Paso 4 · Signo. En [0, α] la gráfica queda **por debajo** del eje X (f<0) y en [α, 3] **por encima** (f>0).



b) Cálculo del área

Como f cambia de signo en α hay que dividir la integral:

$$\text{Área} = \int_0^{\alpha} (-f(x))\,dx + \int_{\alpha}^{3} f(x)\,dx = -[F(\alpha) - F(0)] + [F(3) - F(\alpha)]$$

Primitiva:

$$F(x) = \int (x^3 + 7x - 6)\,dx = x^4/4 + 7x^2/2 - 6x$$

Como F(0) = 0, queda: **Área = F(3) − 2·F(α)**.

$$F(3) = 81/4 + 63/2 - 18 = 81/4 + 126/4 - 72/4 = \mathbf{135/4 = 33{,}75}$$

Simplificamos F(α) usando que α³ = 6 − 7α, de donde α⁴ = α·α³ = 6α − 7α²:

$$F(\alpha) = (6\alpha - 7\alpha^2)/4 + 7\alpha^2/2 - 6\alpha = 3\alpha/2 - 7\alpha^2/4 + 7\alpha^2/2 - 6\alpha = \mathbf{7\alpha^2/4 - 9\alpha/2}$$

Con α ≈ 0,7874 se obtiene α² ≈ 0,6200 y F(α) ≈ 1,0850 − 3,5433 = −2,4583.

$$\text{Área} = 33{,}75 - 2\cdot(-2{,}4583) \approx \mathbf{38{,}67\ u^2}$$

✓ Área ≈ 38,67 u² (exacta: $135/4 - 7\alpha^2/2 + 9\alpha$, con α la raíz real de $x^3+7x-6=0$)

Comprobación: la parte bajo el eje vale $-F(\alpha) \approx 2{,}46$ u² y la parte sobre el eje $F(3) - F(\alpha) \approx 36{,}21$ u². Suman 38,67 ✓. Visualmente tiene sentido: la parte negativa es un trozo pequeño frente al enorme triángulo-curvo sobre el eje.

Nota por si hay errata. En la ficha el polinomio aparece como x^3+7x-6 y no tiene raíces «bonitas». Si en realidad fuera **$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$** (muy típico en este tipo de problemas), las raíces en [0,3] serían 1 y 2; con $F(x)=x^4/4 - 7x^2/2 + 6x$ se tiene $F(0)=0$, $F(1)=11/4$, $F(2)=2$, $F(3)=27/4$ y el área sería $11/4 + 3/4 + 19/4 =$ **$33/4 = 8{,}25$ u²**. Consulta con tu profesor/a cuál es el enunciado correcto; el desarrollo anterior es para el enunciado tal como aparece escrito.

5 Recinto limitado por $y = 9 - x^2$ e $y = 0$

(2 puntos)

Enunciado. *La curva $y = 9 - x^2$ y la recta $y = 0$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.*

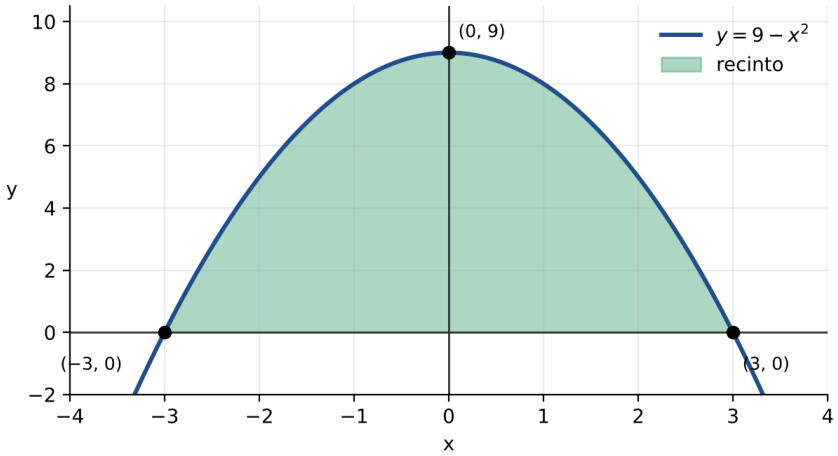
a) Esquema del recinto

Tipo de curva: $y = 9 - x^2$ es una parábola con las ramas hacia abajo (coeficiente de x^2 negativo).

Vértice: $x_v = -b/(2a) = 0$, $y_v = 9 \rightarrow$ **V(0, 9)** (el máximo).

Cortes con y = 0 (eje X): $9 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 9 \Longrightarrow$ **x = −3** y **x = 3**. Puntos (−3,0) y (3,0).

El recinto finito es el «cuenco» entre la parábola y el eje X, desde $x = -3$ hasta $x = 3$.



b) Área

En $[-3,3]$ la parábola está por encima del eje ($f \geq 0$), así que no hace falta trocear:

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = \left[9x - x^3/3\right]_{-3}^{3}$$

$$= (27 - 9) - (-27 + 9) = 18 - (-18) = \mathbf{36}$$

Atajo por simetría. La función es par, así que $A = 2\int_0^3 (9 - x^2)dx = 2 \cdot (27 - 9) = 36$. ✓
Además, es una parábola con base 6 y altura 9: área de un segmento parabólico = (2/3)·base·altura = (2/3)·6·9 = 36 ✓ (fórmula de Arquímedes).

✔ Área = 36 u²

8 Recinto entre $y = x^3$ e $y = x^2 + 2x$

con esquema previo

Enunciado. *Calcula el área encerrada por la curva $y = x^3$ y la parábola $y = x^2 + 2x$, dibujando previamente un esquema del recinto limitado por ambas curvas.*

Paso 1 · Puntos de corte

Igualamos las dos funciones:

$$x^3 = x^2 + 2x \Longrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0$$

Y como $x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = [1 \pm \sqrt{(1+8)}]/2 = [1 \pm 3]/2 \Longrightarrow x = 2$ o $x = -1$. Por tanto:

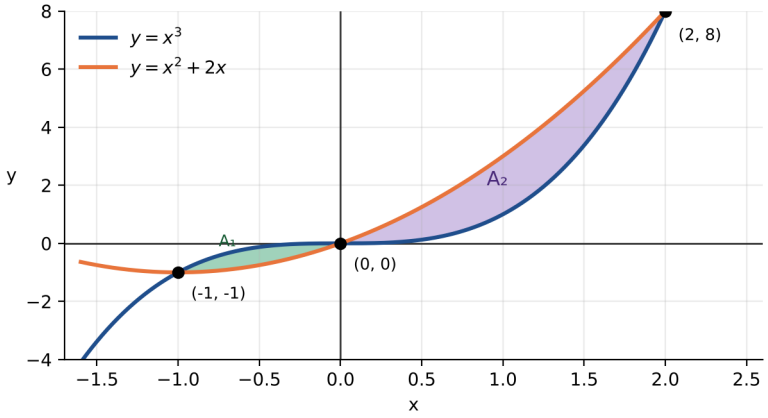
$$\mathbf{x = -1, \quad x = 0, \quad x = 2} \quad \rightarrow \text{puntos } (-1,-1),\ (0,0) \text{ y } (2,8)$$

Hay **tres** puntos de corte, luego el recinto se compone de **dos regiones**: una en $[-1, 0]$ y otra en $[0, 2]$.

Paso 2 · Qué curva está arriba en cada tramo

Probamos con un punto de cada intervalo, evaluando $h(x) = x^3 - (x^2+2x)$:

Intervalo	x de prueba	x^3	$x^2 + 2x$	Más arriba
$(-1, 0)$	$-0{,}5$	$-0{,}125$	$-0{,}75$	la cúbica x^3
$(0, 2)$	1	1	3	la parábola



Paso 3 · Planteamiento y cálculo

$$A = \int_{-1}^{0} [x^3 - (x^2+2x)]\,dx + \int_{0}^{2} [(x^2+2x) - x^3]\,dx$$

Una primitiva de $x^3 - x^2 - 2x$ es $G(x) = x^4/4 - x^3/3 - x^2$. La segunda integral es la opuesta, así que:

$$A_1 = G(0) - G(-1) = 0 - (1/4 + 1/3 - 1) = 0 - (-5/12) = \mathbf{5/12}$$

$$A_2 = -[G(2) - G(0)] = -(4 - 8/3 - 4) = \mathbf{8/3} = 32/12$$

$$A = 5/12 + 32/12 = \mathbf{37/12}$$

✔ Área = 37/12 u² ≈ 3,08 u²

Error típico: calcular $\int_{-1}^{2}[x^3 - (x^2+2x)]dx$ de golpe. Daría $5/12 - 8/3 = -9/4$, porque las dos regiones se restan al cambiar la curva superior en $x=0$.

1 Recinto entre f(x) = 4 − x² y g(x) = x² + 2x

puntos de intersección, gráfica y área

Enunciado. *Considere las curvas f(x) = 4 − x² y g(x) = x² + 2x. a) Encuentre sus puntos de intersección. b) Represente razonadamente ambas curvas en la misma gráfica, mostrando con claridad el recinto que delimitan. c) Encuentre el área de ese recinto.*

a) Puntos de intersección

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4 - x^2 = x^2 + 2x \Longrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = [-1 \pm \sqrt{(1 + 8)}]/2 = (-1 \pm 3)/2 \Longrightarrow \mathbf{x = 1} \text{ o } \mathbf{x = -2}$$

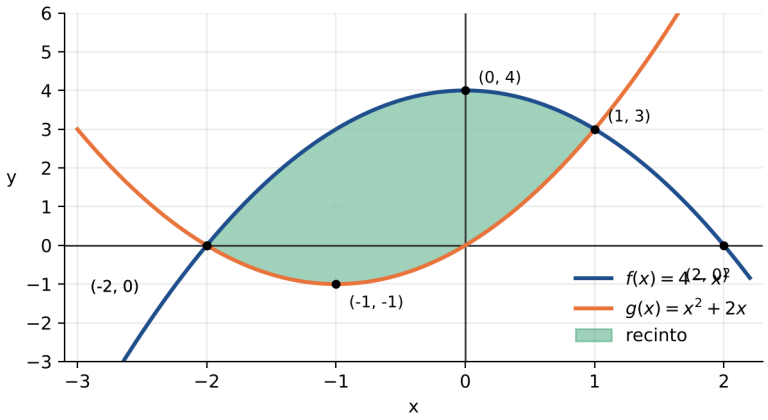
Calculamos la ordenada con f: f(1) = 3 y f(−2) = 0. Luego los puntos de corte son **(−2, 0)** y **(1, 3)**. (Comprobación con g: g(1) = 3 ✓, g(−2) = 4 − 4 = 0 ✓).

b) Representación razonada

f(x) = 4 − x²: parábola con ramas hacia abajo, vértice (0, 4); corta al eje X en x = ±2.

g(x) = x² + 2x = x(x + 2): parábola con ramas hacia arriba; corta al eje X en x = 0 y x = −2; vértice en x = −b/2a = −1, g(−1) = −1 → **(−1, −1)**.

x	−2	−1	0	1	2
f(x) = 4 − x²	0	3	4	3	0
g(x) = x² + 2x	0	−1	0	3	8



Una parábola abierta hacia abajo y otra hacia arriba que se cortan en dos puntos encierran un recinto en forma de «lente» entre x = −2 y x = 1.

c) Área del recinto

En (−2, 1) la curva superior es f (p. ej. en x = 0: f = 4 > g = 0). Entonces:

$$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\,dx$$

$$= [-2x^3/3 - x^2 + 4x]_{-2}^{1}$$

$$F(1) = -2/3 - 1 + 4 = 7/3 \qquad F(-2) = 16/3 - 4 - 8 = -20/3$$

$$A = 7/3 - (-20/3) = 27/3 = \mathbf{9}$$

✔ Área = 9 u²

Comprobación con Arquímedes: A = |a|(x₂−x₁)³/6 donde a = −2 es el coeficiente líder de f − g: A = 2·3³/6 = 9 ✓.

6 Área de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

con el eje X y las rectas x = 0 y x = 4

Enunciado. *Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$, $x=4$.*

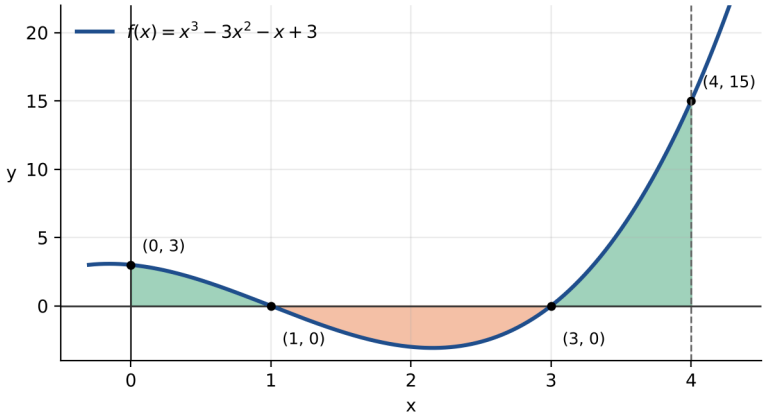
Paso 1 · Raíces de f (cortes con el eje X)

Factorizamos por agrupación: $f(x) = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1) = \mathbf{(x-3)(x-1)(x+1)}$.

Raíces: $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. Dentro de $[0, 4]$ caen **x = 1** y **x = 3** (la raíz -1 queda fuera).

Paso 2 · Signo de f en cada tramo

Intervalo	x de prueba	f(x)	Signo	Posición
[0, 1]	f(0) = 3	3	+	sobre el eje
[1, 3]	f(2) = 8−12−2+3	−3	−	bajo el eje
[3, 4]	f(4) = 64−48−4+3	15	+	sobre el eje



Paso 3 · Primitiva y valores

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx = x^4/4 - x^3 - x^2/2 + 3x$$

x	0	1	3	4
F(x)	0	$1/4 - 1 - 1/2 + 3 = 7/4$	$81/4 - 27 - 9/2 + 9 = -9/4$	$64 - 64 - 8 + 12 = 4$

Paso 4 · Área por tramos

$$A = \left|\int_0^1 f\right| + \left|\int_1^3 f\right| + \left|\int_3^4 f\right|$$

$$\int_0^1 f = F(1) - F(0) = 7/4$$

$$\int_1^3 f = F(3) - F(1) = -9/4 - 7/4 = -4 \implies |-4| = 4$$

$$\int_3^4 f = F(4) - F(3) = 4 - (-9/4) = 25/4$$

$$A = 7/4 + 4 + 25/4 = 7/4 + 16/4 + 25/4 = 48/4 = \mathbf{12}$$

✔ Área = 12 u²

Error típico: hacer directamente $\int_0^4 f = F(4) - F(0) = 4$. Eso es el área «con signo» (la parte bajo el eje resta) y **no** es el área pedida.

EBAU

Junio 2026 · Pregunta 3, Opción B

f(x) = (x − 2)/(x² + 1)

> ***Enunciado.*** *Dada la función f(x) = (x−2)/(x²+1), se pide: (a) (1,25 puntos) Calcular una primitiva de f. (b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado encerrado por la gráfica de f, el eje X y las rectas x = 0 y x = 1.*

a) Una primitiva de f

Separamos la fracción en dos sumandos, cada uno de ellos una integral inmediata:

$$\int (x-2)/(x^2+1)\,dx = \int x/(x^2+1)\,dx - 2\int 1/(x^2+1)\,dx$$

- **Primera integral** (tipo logaritmo). Como $(x^2+1)' = 2x$, multiplicamos y dividimos por 2:

$$\int x/(x^2+1)\,dx = \tfrac{1}{2}\int 2x/(x^2+1)\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

(No hace falta valor absoluto porque $x^2+1 > 0$ siempre.)

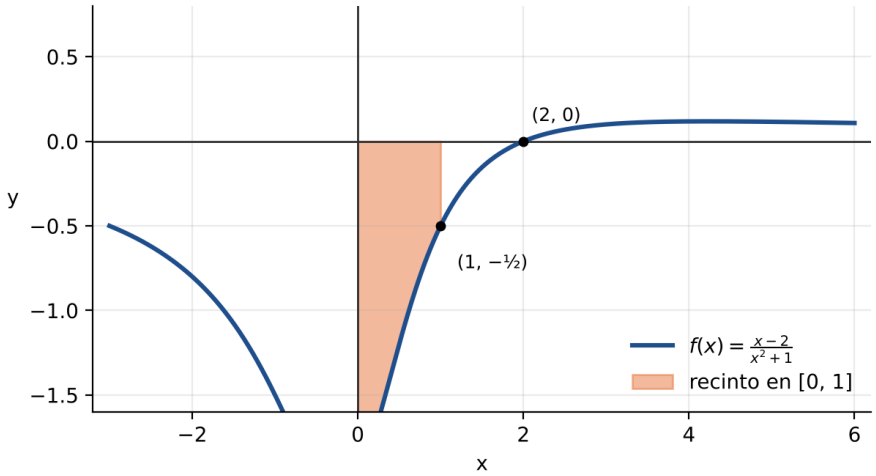
- **Segunda integral** (tipo arcotangente): $\int 1/(x^2+1)\,dx = \text{arctg}\, x$.

$$\mathbf{F(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\,\text{arctg}\, x} \;\; (+ C)$$

Comprobación derivando: $F'(x) = \tfrac{1}{2}\cdot 2x/(x^2+1) - 2/(x^2+1) = (x-2)/(x^2+1) = f(x)$ ✓.

b) Área entre f, el eje X, x = 0 y x = 1

Signo de f en [0,1]: el denominador es siempre positivo y el numerador x − 2 es negativo para x < 2. Luego **f(x) < 0 en [0,1]**: la gráfica queda bajo el eje X, y por eso la integral saldrá negativa y habrá que cambiarle el signo. (La única raíz de f es x = 2, fuera del intervalo, por lo que no hay que trocear.)



$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = [\tfrac{1}{2}\ln 2 - 2\cdot\text{arctg}\,1] - [\tfrac{1}{2}\ln 1 - 2\cdot\text{arctg}\,0]$$

Con $\text{arctg}\,1 = \pi/4$, $\ln 1 = 0$ y $\text{arctg}\,0 = 0$:

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2 - 2\cdot\pi/4 - 0 = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \pi/2 \approx 0{,}3466 - 1{,}5708 = -1{,}2242$$

$$A = |\tfrac{1}{2}\ln 2 - \pi/2| = \mathbf{\pi/2 - \tfrac{1}{2}\ln 2}$$

> **✓ Área = π/2 − (ln 2)/2 ≈ 1,224 u²**

EBAU

Julio 2026 · Pregunta 3, Opción B

f(x) = (x−1)/(2x+1), g(x) = x², h(x) = x³

> ***Enunciado.*** *Dadas las funciones f(x) = (x−1)/(2x+1), g(x) = x² y h(x) = x³: (a) (1,5 puntos) Calcula todas las primitivas de f(x). ¿Cuál de todas ellas pasa por el origen de coordenadas? (b) (1 punto) Calcula el área encerrada entre las gráficas de g(x) y h(x) entre sus puntos de corte.*

a) Todas las primitivas de f

Como numerador y denominador tienen el mismo grado, **dividimos** (o bien reescribimos el numerador en función del denominador). Buscamos A y B tales que x − 1 = A(2x + 1) + B:

$$x - 1 = \tfrac{1}{2}(2x + 1) - 3/2 \quad (\text{pues } \tfrac{1}{2}(2x+1) = x + \tfrac{1}{2},\ \text{y } x + \tfrac{1}{2} - 3/2 = x - 1\ \checkmark)$$

$$f(x) = (x - 1)/(2x + 1) = \tfrac{1}{2} - (3/2)/(2x + 1)$$

Ahora integramos término a término. Para el segundo, como (2x+1)' = 2, ajustamos la constante:

$$\int f(x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}\,dx - (3/2)\int 1/(2x+1)\,dx = x/2 - (3/2)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\ln|2x + 1| + C$$

$$\mathbf{F(x) = x/2 - (3/4)\cdot\ln|2x + 1| + C}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Comprobación: F'(x) = ½ − (3/4)·2/(2x+1) = ½ − (3/2)/(2x+1) = f(x) ✓.

Primitiva que pasa por el origen: imponemos F(0) = 0:

$$F(0) = 0 - (3/4)\cdot\ln|1| + C = 0 + C = 0 \implies \mathbf{C = 0}$$

> **✓ F(x) = x/2 − (3/4)·ln|2x + 1| (la que pasa por (0,0))**

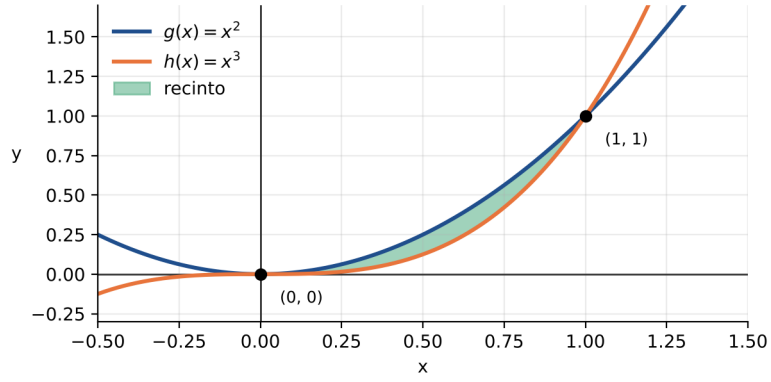
Observación: f no está definida en x = −1/2, así que las primitivas se definen por separado en (−∞, −1/2) y en (−1/2, +∞); el origen está en la segunda, donde 2x + 1 > 0 y C = 0.

b) Área entre g(x) = x² y h(x) = x³

Puntos de corte: $x^2 = x^3 \implies x^2(1 - x) = 0 \implies \mathbf{x = 0}$ (raíz doble) y **x = 1**. Puntos (0,0) y (1,1).

Posición relativa: en (0,1), por ejemplo x = ½: g = ¼ y h = ⅛, luego g(x) ≥ h(x). Entonces:

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = [x^3/3 - x^4/4]_0^1 = 1/3 - 1/4 = \mathbf{1/12}$$



> **✓ Área = 1/12 u² ≈ 0,083 u²**